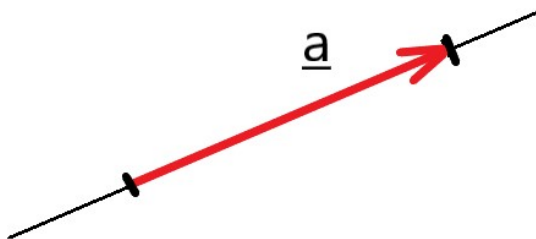


1. Geometriai vektorok

Ebben a bevezető fejezetben a középiskolában tanult vektorfogalmat ("irányított szakasz") ismételjük át, és kiegészítjük néhány új fogalommal. A későbbiekben a vektornak általánosabb értelmezést adunk. Ezért a később definiálandó vektorfogalomtól való megkülönböztetésül az irányított szakaszokat **geometriai vektoroknak** fogjuk nevezni.

1.1. A geometriai vektor fogalma

A középiskolai definíció szerint a vektor nem más, mint irányított szakasz, a síkon vagy a térben. (A sík és a tér alapfogalmak a geometriában, ezeket nem definiáljuk. A szakasz egy egyenes két pontja közé eső része (azaz ponthalmaz).) Az irányítás azt jelenti, hogy a szakasz két szélső pontját megkülönböztetjük: az egyiket kijelöljük kezdőpontnak, a másik a végpont. (Ábrázoláskor a végpontba nyilat rajzolunk.) A vektorokat általában kisbetűvel és aláhúzással fogjuk jelölni, pl. $\underline{a}$.



A geometriai vektoroknak van hosszuk és irányuk. Értelmezzük ezeket a fogalmakat a matematika nyelvén!

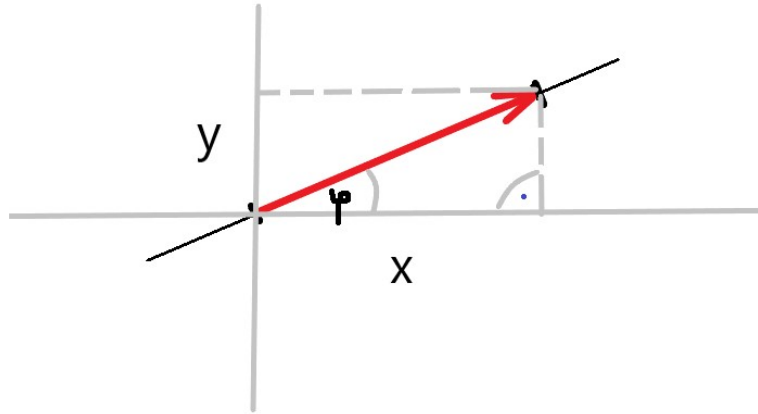
A síkon egy $\underline{a}$ vektor hosszát a következőképpen értelmezzük. Felveszünk egy egyenest, amely átmegy a vektor kezdőpontján. Ezután felveszünk még egy egyenest az előbbire merőlegesen, szintén a kezdőponton keresztül. Az irányított szakasznak képezzük a vetületét mindkét egyenesre (jelölje ezeket a vetületeket x és y), és a vetületek hosszából a keletkező derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétellel kapott számot nevezzük a továbbiakban a vektor hosszának. Az $\underline{a}$ vektor hosszát jelölje $|\underline{a}|$. Tehát

$$|\underline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

(A merőlegesség és a vetület fogalmát a geometriából ismertnek tételezzük fel.)

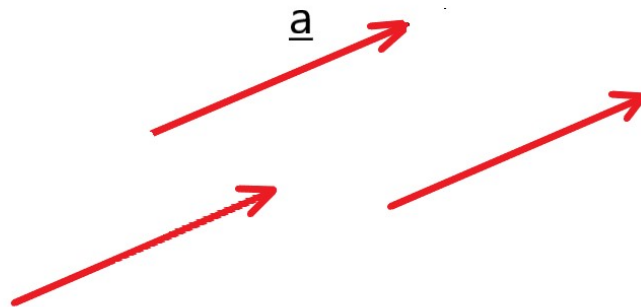
A geometriai vektor irányát is tudjuk számszerűen jellemezni: pl. annak a ϕ forgásszögnek a megadásával amelyet az irányított szakasz az egyik rögzített egyenes valamelyik

féltengelyével bezár. (0 és 360° közötti szög.)



Megjegyezzük, hogy térvektorok hosszát szintén értelmezhetjük a Pitagorasz-tétellel egy harmadik, az előzőekre merőleges egyenes felvételével ($|\underline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$), az irányt pedig két szög segítségével tudjuk megadni.

A továbbiakban azokat a geometriai vektorokat, amelyeknek megegyezik a hosszuk és az irányuk, nem tekintjük különbözőnek.



Ez mind ugyanaz az a vektor.

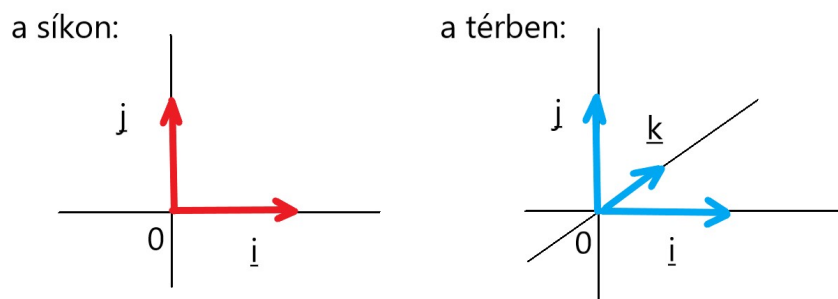
Ebből következik, hogy ha a síkon/a térben rögzítünk egy pontot (nevezzük ezt origónak és jelöljük O -val), akkor minden egyes geometriai vektor azonosítható egy olyan vektorral, amelynek az origó a kiindulópontja. Ezért a továbbiakban elegendő csak az origóból kiinduló vektorokkal foglalkozni.

1.1 Megjegyzés. A sík összes vektorát (a síkvektorokat) a továbbiakban jelölje $\mathcal{E}_2$, a tér összes vektorát (a térvektorokat) pedig $\mathcal{E}_3$. Hangsúlyozzuk, hogy a térben végtelen sok sík van, de "a sík" és "egy sík a térben" két különböző dolog. A sík nem része a térnek, és így a mi értelmezésünkben az $\mathcal{E}_2$ halmaz sem részhalmaza az $\mathcal{E}_3$ halmaznak.

Mindkét vektorhalmazt, a sík összes vektorát és a tér összes vektorát is kiegészítjük egy-egy különleges elemmel: egy olyan "szakasszal", amelynek nemcsak a kezdő-, hanem a végpontja is az origó, ezt nevezzük nullvektornak. Jelölése: $\underline{0}$. (A sík nullvektora és a tér nullvektora nem azonos, de jelölésben nem teszünk közöttük különbséget, mert a szövegkörnyezetből mindig világos, hogy melyik halmaznak a nullvektoráról van szó.)

Fontos nevezetes vektorok az ún. descartes-i egységvektorok. Ezek értelmezéséhez nevezzük x - és y -tengelynek (térvektorok esetén x -, y - és z -tengelynek) az origón átmenő, egymásra merőlegesen felvett segédegyeneseket. Az egyenesek origóval elválasztott darabjait nevezzük ki pozitív és negatív féltengelynek úgy, hogy a pozitív féltengelyek jobbsodrású rendszert alkossanak. Az ezek irányába eső egységvektorokat jelölje $\underline{i}$, $\underline{j}$ (ill. $\underline{k}$). (Bár a jelölés ugyanaz, ismételten hangsúlyozzuk, hogy a sík $\underline{i}$ egységvektora nem ugyanaz, mint a tér $\underline{i}$ egységvektora, hiszen két különböző alaphalmazból vett vektorokról van szó.)

A descartes-i egységvektorok



1.2. Műveletek geometriai vektorokkal

A geometriai vektorok körében sokfajta műveletet értelmezünk. Ezek közül a legalapvetőbbek az összeadás és a skalárral (valós számmal) való szorzás (a középiskolában tanult módon). Emlékeztetőül: két vektort a paralelogramma-szabállyal adunk össze, az $\underline{a}$ vektor λ számszorosán pedig azt a vektort értjük (jelölése $\lambda \underline{a}$), amelynek a hosszúsága $|\lambda \underline{a}| = |\lambda| \cdot |\underline{a}|$, iránya pedig $\underline{a}$ irányával megegyező, ha $\lambda > 0$, és azzal ellentétes, ha $\lambda < 0$. $\lambda = 0$ esetén $\lambda \cdot \underline{a} = \underline{0}$, továbbá a nullvektort bármely számmal szorozva a nullvektort kapjuk.

A két műveletre igaz a következő hét tulajdonság:

1. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a} \quad \forall \underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{E}_n \ (n = 2, 3)$ (az összeadás kommutatív)
2. $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) \quad \forall \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathcal{E}_n \ (n = 2, 3)$ (az összeadás asszociatív)
3. A nullvektor egy olyan vektor, amely azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy bármely $\underline{a} \in \mathcal{E}_n \ (n = 2, 3)$ vektorhoz adva $\underline{a}$ -t kapjuk, azaz $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$.
4. Minden $\underline{a} \in \mathcal{E}_n \ (n = 2, 3)$ vektorhoz létezik olyan vektor, amelyet $\underline{a}$ -hoz adva a nullvektort kapjuk: ez az $\underline{a}$ -val ellentétes irányú, vele megegyező hosszúságú vektor. Ezt a vektort jelölje $-\underline{a}$, és elnevezése: az $\underline{a}$ ellentett vektora.
5. Vektorok összegét tagonként szorozhatjuk:
 $\lambda \cdot (\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \cdot \underline{a} + \lambda \cdot \underline{b} \quad \forall \underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{E}_n \ (n = 2, 3)$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (vektordisztributivitás)
6. Két valós szám összegével bármely vektort tagonként megszorozhatunk :
 $(\lambda + \mu) \cdot \underline{a} = \lambda \cdot \underline{a} + \mu \cdot \underline{a} \quad \forall \underline{a} \in \mathcal{E}_n \ (n = 2, 3)$ és $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (skalárdisztributivitás)
7. Két valós számmal tetszőleges sorrendben szorozhatunk:
 $\lambda \cdot (\mu \cdot \underline{a}) = \mu \cdot (\lambda \cdot \underline{a}) = (\lambda\mu) \cdot \underline{a} \quad \forall \underline{a} \in \mathcal{E}_n \ (n = 2, 3)$ és $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (skalárasszociativitás)

Megjegyzés: A fentiek segítségével értelmezhető a kivonás: $\underline{a} - \underline{b} := \underline{a} + (-\underline{b})$ és a skalárral való osztás (ha $\lambda \neq 0$): $\frac{\underline{a}}{\lambda} := \frac{1}{\lambda} \cdot \underline{a}$

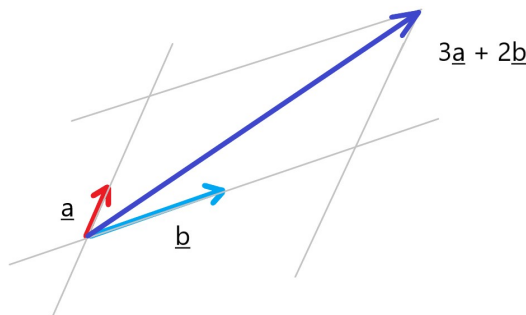
Feladat. Legyen $\underline{a} \neq \underline{0}$. Milyen hosszú az $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ vektor?

Megoldás: $\left| \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} \right| = \left| \frac{1}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a} \right| = \left| \frac{1}{|\underline{a}|} \right| \cdot |\underline{a}| = \frac{1}{|\underline{a}|} \cdot |\underline{a}| = 1$

Ezen két művelet segítségével értelmezhető a következő fogalom.

1.2 Definíció. Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$ geometriai vektorok **lineáris kombinációján** valamely $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, p$ valós számok mellett az $\alpha_1 \cdot \underline{a}_1 + \alpha_2 \cdot \underline{a}_2 + \dots + \alpha_p \cdot \underline{a}_p$ vektort értjük.

Pl. egy $\underline{a}$ és egy $\underline{b}$ vektornak lineáris kombinációi: $2\underline{a} + 0\underline{b}$, $\frac{3}{4}\underline{a} + 10\underline{b}$, $\pi\underline{a} - 2\underline{b}$ stb.



Hány lineáris kombinációt lehet gyártani? Végtelen sokat.

Mi lesz a lineáris kombináció, ha mindkét vektort 0-val szorozzuk? $0\underline{a} + 0\underline{b} = \underline{0}$ (ún. triviális lineáris kombináció)

Fontos kérdés: Adott $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$ vektorokból hogyan kaphatjuk meg lineáris kombinációval a nullvektort? Nyilvánvalóan, ha mindegyik $\alpha_i = 0$, akkor megkapjuk a nullvektort. De vajon van más lehetőség is?

1.3 Definíció. Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$ vektorokat **lineárisan függetleneknek** nevezzük, ha lineáris kombinációjuk csak akkor egyenlő a nullvektorral, ha minden vektort nullával szorzunk. (Röviden: $\alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \dots + \alpha_p\underline{a}_p = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i = 1, 2, \dots, p$.)

Ennek ellentéte a lineáris összefüggőség:

1.4 Definíció. Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$ vektorokat **lineárisan összefüggőknek** nevezzük, ha lineáris kombinációjuk úgy is egyenlő lehet a nullvektorral, ha valamelyik vektort nemnulla számmal szorozzuk.

A továbbiakban sokat foglalkozunk vektorokból álló halmazokkal (ún. vektorhalmaz vagy vektorrendszer). Értelemszerűen, ha azt a kifejezést használjuk, hogy az $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p\}$ vektorhalmaz lineárisan összefüggő/független, akkor azon azt kell érteni, hogy az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$ vektorok lineárisan összefüggők/függetlenek.

Feladat. Lineárisan összefüggő-e az $\{\underline{a}, \underline{0}\}$ vektorhalmaz, ahol $\underline{a} \in \mathcal{E}_2$, $\underline{a} \neq \underline{0}$ tetszőleges?

Megoldás: Milyen együtthatókkal állhat fenn: $\alpha_1\underline{a} + \alpha_2\underline{0} = \underline{0}$? Ha $\alpha_1 = 0$, akkor α_2 tetszőlegesen megválasztható $\Rightarrow$ a vektorhalmaz lineárisan összefüggő.

(Hasonlóan meggondolható, hogy minden olyan vektorrendszer lineárisan összefüggő, amelyben benne van a nullvektor.)

Annak eldöntéséhez, hogy egy vektorhalmaz lineárisan összefüggő vagy független-e, sok esetben fel tudjuk használni a következő tételt.

1.5 Állítás. Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$ vektorok pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha **legalább egyikük** előállítható a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Biz.: A bizonyítás két részből áll.

1. ($\Rightarrow$) Tegyük fel, hogy $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$ lineárisan összefüggők. Ekkor léteznek olyan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ számok, amelyekkel

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \dots + \alpha_p\underline{a}_p = \underline{0},$$

és legalább az egyik együttható nem nulla, legyen α_i egy ilyen együttható. Ekkor ezen α_i -vel eloszthatjuk az egyenlőség mindkét oldalát. Átrendezve:

$$\underline{a}_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\underline{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i}\underline{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\underline{a}_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\underline{a}_{i+1} - \dots - \frac{\alpha_p}{\alpha_i}\underline{a}_p,$$

vagyis $\underline{a}_i$ kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként.

2. ($\Leftarrow$) Tegyük fel, hogy valamely $\underline{a}_i$ vektor kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként, azaz

$$\underline{a}_i = \alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \dots + \alpha_{i-1}\underline{a}_{i-1} + \alpha_{i+1}\underline{a}_{i+1} + \dots + \alpha_p\underline{a}_p.$$

Ekkor

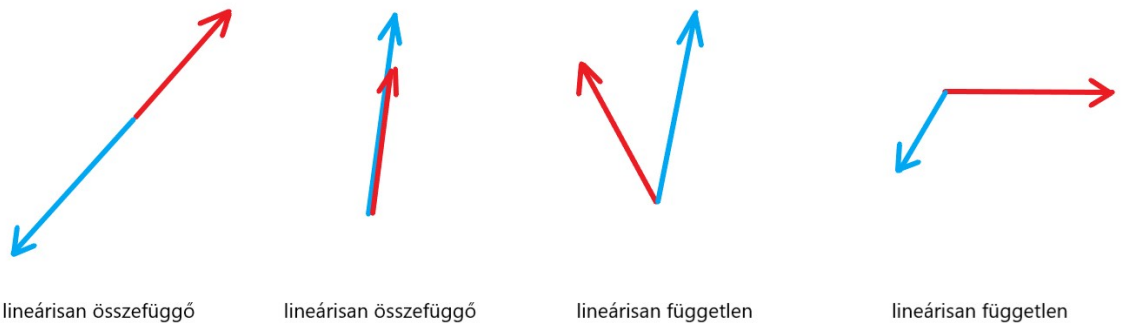
$$1 \cdot \underline{a}_i - \alpha_1\underline{a}_1 - \alpha_2\underline{a}_2 - \dots - \alpha_{i-1}\underline{a}_{i-1} - \alpha_{i+1}\underline{a}_{i+1} - \dots - \alpha_p\underline{a}_p = \underline{0}.$$

A bal oldalon egy nemtriviális lineáris kombináció áll (a legelső együttható 1), így a vektorok lineárisan összefüggők.

1.6 Következmény. Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$ vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha egyikük sem állítható elő a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Mindezek alapján beláthatók a következő állítások.

1. Két nemnulla vektor pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha kollineárisak (azaz egy egyenesbe esők).



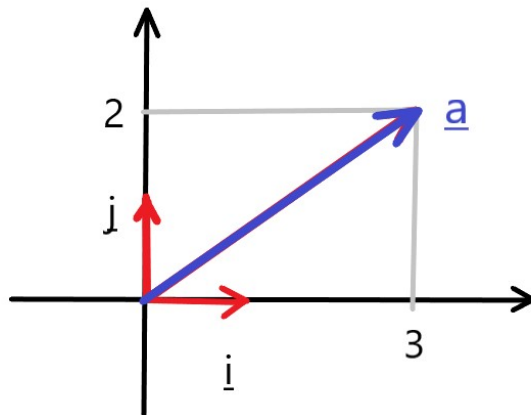
2. Három nemnulla vektor pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha komplanárisak (azaz egy síkba esők).

3. Négy vagy több geometriai vektor már mindig lineárisan összefüggő.

Fontos következmények:

- 2. $\Rightarrow$ A síkon három vektor mindig lineárisan összefüggő (hiszen egy síkban vannak).
- 1. $\Rightarrow$ A síkon az $\underline{i}, \underline{j}$ descartes-i egységvektorok lineárisan függetlenek.
- 2. $\Rightarrow$ A térben az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ descartes-i egységvektorok lineárisan függetlenek (ugyanis páronként merőlegesek egymásra, így nem esnek egy síkba).

A már említett descartes-i egységvektorok igen fontos tulajdonsága, hogy minden geometriai vektor előállítható ezek lineáris kombinációjaként, ráadásul egyértelműen, azaz csak egyféleképpen. Tekintsük például azt az $\underline{a}$ síkvektort, amely az első síknegyedbe esik, az x -tengelyre eső vetülete 3 hosszúságú, az y -tengelyre eső vetülete pedig 2 hosszúságú. Világos, hogy ezt az $\underline{a}$ vektort csak a következő lineáris kombinációval tudjuk előállítani az $\underline{i}$ és $\underline{j}$ egységvektorokból: $\underline{a} = 3 \cdot \underline{i} + 2 \cdot \underline{j}$.



Miért jó az egyértelmű előállítás? Mivel minden egyes $\underline{v} \in \mathcal{E}_2$ vektort csak egyféleképpen lehet az $\alpha_1 \underline{i} + \alpha_2 \underline{j}$ alakban felírni, ezért a $\underline{v}$ vektort egyértelműen azonosítja az α_1 és α_2 szám. Mivel nem mindegy, hogy ezek közül melyik az $\underline{i}$, és melyik a $\underline{j}$ együtthatója (hiszen pl. a $3 \cdot \underline{i} + 2 \cdot \underline{j}$ és a $2 \cdot \underline{i} + 3 \cdot \underline{j}$ nem ugyanaz), ezért a két számot rendezett számpárpént ($\mathbb{R}^2$ -beli elem) adjuk meg: mindig előre írjuk az $\underline{i}$ és hátra a $\underline{j}$ együtthatóját. Így pl. az $\underline{a} = 3\underline{i} + 2\underline{j}$ vektort egyértelműen megadhatjuk a $(3, 2)$ számpárral. Az α_1 és α_2 számot a vektor **descartes-i koordinátáinak**, az $\alpha_1 \underline{i}$ és $\alpha_2 \underline{j}$ vektorokat pedig a vektor **komponenseinek** (összetevőinek) nevezzük. A descartes-i koordináták geometriailag egyszerűen megkaphatók: ezek az x -és y -tengelyre eső előjeles vetületek.

A térvektorokat ugyanilyen módon számhármassokkal ($\mathbb{R}^3$ -beli elemekkel) azonosíthatjuk.

1.3. A polárkoordináta-rendszer

Síkvektorokat gyakran kényelmes ún. polárkoordinátákkal megadni: az r hosszúsággal és a ϕ irányszöggel ($\phi \in [0, 2\pi)$, ahol az intervallum balról zárt, jobbról nyílt!):

$$\underline{a} \mapsto (r, \phi)_p$$

Feladat: a.) Adjuk meg az $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}$ vektor polárkoordinátás alakját!

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \phi = \frac{\pi}{4} (45^\circ) \Rightarrow \underline{a} \text{ polárkoordinátás alakja: } (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})_p$$

b.) Ha egy $\underline{a}$ vektor polárkoordinátás alakja $(4, \frac{\pi}{3})_p$, akkor mik a Descartes-koordinátái?

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi = 4 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \\ y &= r \sin \phi = 4 \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} \end{aligned} \Rightarrow \underline{a} \text{ Descartes-koordinátás alakja: } (2, 2\sqrt{3})$$

2. Az $\mathbb{R}^n$ vektortér

Ebben a fejezetben kibővítjük a vektor fogalmát.

Feladat: Adjuk meg síkbeli vektorok

a.) összegének,

b.) skalárszorosának

descartes-i koordinátáit!

a.) Legyen $\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j}$ és $\underline{b} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j}$ két $\mathcal{E}_2$ -beli vektor. Ekkor

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j}) + (b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j}) = (a_1 + b_1) \underline{i} + (a_2 + b_2) \underline{j},$$

amiből $\underline{a} + \underline{b}$ koordinátái: $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$. Azaz összeadásnál a megfelelő koordináták összeadódnak.

b.) Legyen $\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

$$\lambda \cdot \underline{a} = \lambda \cdot (a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j}) = (\lambda \cdot a_1) \underline{i} + (\lambda \cdot a_2) \underline{j}.$$

Ebből a $\lambda \cdot \underline{a}$ vektor Descartes-koordinátái: $(\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2)$. Vagyis az $\underline{a}$ vektor mindkét Descartes-koordinátája λ -val szorozódik.

Tekintsük most $\mathbb{R}^2$ -t önmagában. Ez a rendezett valós számpárok halmaza. Vezessünk be ezen a halmazon két műveletet:

1. Összeadáson értsük a következőt: $(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d)$;

2. Skalárral való szorzáson pedig a következőt: $\lambda \odot (a, b) := (\lambda a, \lambda b)$.

Belátható, hogy ez a két művelet ugyanazzal a hét tulajdonsággal rendelkezik, mint a geometriai vektorok összeadása és skalárral való szorzása! Mutassuk meg pl., hogy az összeadás kommutatív:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (c, d) \oplus (a, b)!$$

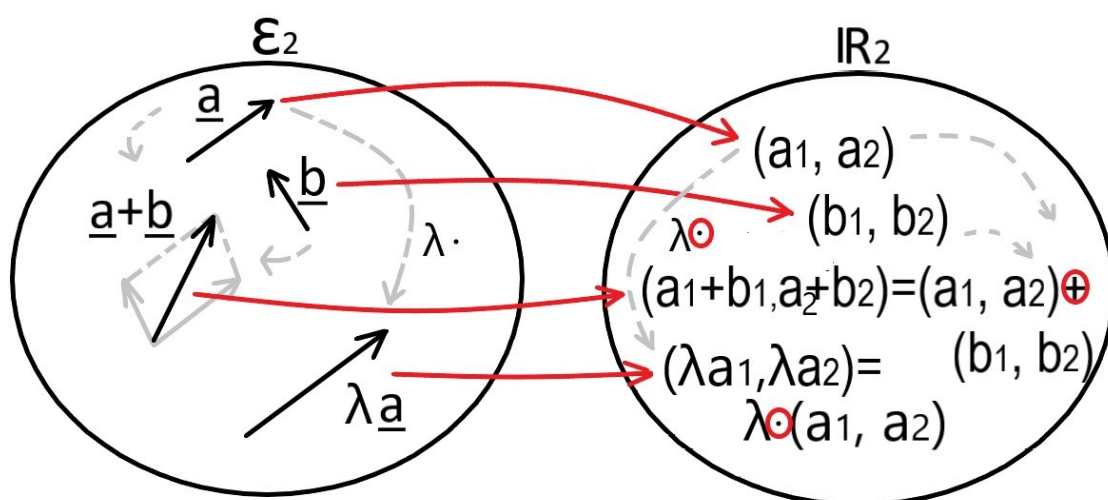
Ez igaz, mert $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) \oplus (a, b)$. (A második egyenlőség azért áll fenn, mert a valós számok összeadása kommutatív.)

A nullvektor tulajdonságával rendelkezik a $(0, 0)$ számpár: $(a, b) \oplus (0, 0) = (a, b)$

(A maradék öt tulajdonságot lássuk be önállóan.)

Az $\mathcal{E}_2$ és az $\mathbb{R}^2$ nagyfokú hasonlósága indokolja, hogy a továbbiakban az $\mathbb{R}^2$ halmaz elemeit szintén vektoroknak nevezzük, az egész $\mathbb{R}^2$ halmazt pedig a fenti két művelettel ellátva (kétdimenziós) vektortérnek hívjuk.

Az $\mathbb{R}^2$ vektortér szoros kapcsolatban van a síkvektorokkal: láttuk, hogy kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak a két halmaz elemei. Ez a bijekció (kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés) ráadásul művelettartó is, ami a következőt jelenti. Ha az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektoroknak az (a_1, a_2) és a (b_1, b_2) számpár felel meg, akkor az $\underline{a} + \underline{b}$ összegnek éppen az a számpár felel meg, amelyet úgy kapunk, hogy az $\mathbb{R}^2$ -n definiált összeadási szabállyal összeadjuk az (a_1, a_2) és a (b_1, b_2) számpárt. Hasonlóan, a $\lambda \cdot \underline{a}$ vektornak az a számpár felel meg, amelyet úgy kapunk, hogy az $\mathbb{R}^2$ -n definiált szorzási szabályt követve megszorozzuk az (a_1, a_2) számpárt λ -val.



Ez a művelettartó bijekció biztosítja, hogy a síkvektorok helyett számolhatunk a nekik megfeleltetett számpárokkal. Egy számpár és a megfelelő síkvektor közé egyenlőségjelet

teszünk. Ezt figyelhetjük meg az alábbi példában.

Feladat: Legyen $\underline{a} = \underline{i} + 2\underline{j}$ és $\underline{b} = -2\underline{i} - \underline{j}$. Adjuk meg a $3(\underline{a} + \underline{b})$ vektor Descartes-koordináta-rendszerbeli alakját!

Megoldás: Kétféleképpen is elvégezhetjük a számolást. Az 1. esetben először a vektorokkal számolunk, majd a végén megvizsgáljuk a kapott vektor descartes-i koordinátáit. A 2. esetben rögtön a számolás előtt áttérünk az $\mathbb{R}_2$ vektortérre, és abban végezzük el a megfelelő műveleteket. Az eredmény ugyanaz. (Figyeljük meg azokat az egyenlőségjeleket, amelyek valójában azonosítást fejeznek ki geometriai vektor és számpár között!)

$$1. \quad 3(\underline{a} + \underline{b}) = 3(\underline{i} + 2\underline{j} - 2\underline{i} - \underline{j}) = 3(-\underline{i} + \underline{j}) = -3\underline{i} + 3\underline{j} = (-3, 3)$$

$$2. \quad 3(\underline{a} + \underline{b}) = 3 \odot ((1, 2) \oplus (-2, -1)) = 3 \odot (-1, 1) = (-3, 3).$$

Hasonlóan bevezethetők az $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \dots, \mathbb{R}^n$ (ún. három-, négy- ill. n -dimenziós) vektorterek. (A térvektorok vektortere $\mathbb{R}^3$ -mal azonosítható, a többi vektortér elemeit azonban nem tudjuk geometriai vektorokkal azonosítani.)

3. Geometriai vektorok skaláris és vektoriális szorzata

Térjünk vissza a geometriai vektorokra! Ezek körében további műveleteket értelmezünk, amelyek bevezetését a fizikai alkalmazások indokolják.

3.1. Skaláris szorzat

3.1 Definíció. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{E}_n$ ($n = 2$ vagy 3). Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor $\underline{a} \cdot \underline{b}$ -vel jelölt skaláris szorzatán az

$$\underline{a} \cdot \underline{b} := |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \gamma$$

valós számot értjük, ahol γ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok közrezárt szöge.

A közrezárt szögen azt a, 0 és 180 fok közötti forgásszöget értjük, amellyel az egyik vektor a másikba beforgatható.

$$\text{Pl. } |\underline{a}| = \sqrt{3}, \quad |\underline{b}| = 2, \quad \gamma = 30^\circ$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ = 3$$

Könnyen látható, hogy mindegyik descartes-i egységvektor önmagával vett skaláris szorzata 1, két különböző descartes-i egységvektor skaláris szorzata pedig 0.

A definíció alapján a skaláris szorzatból meghatározható a közbezárt szög: $\cos \gamma = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$

Három esetet különböztethetünk meg:

1. $\underline{a} \cdot \underline{b} > 0 \Rightarrow \gamma$ hegyesszög;
2. $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \Rightarrow \gamma$ derékszög;
3. $\underline{a} \cdot \underline{b} < 0 \Rightarrow \gamma$ tompa- vagy egyenesszög.

Műveleti tulajdonságok: bármely $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathcal{E}_n$ ($n=2$ vagy 3) vektorra és $\alpha \in \mathbb{R}$ számra

1. $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$
2. $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c}$
3. $(\alpha \underline{a}) \cdot \underline{b} = \alpha(\underline{a} \cdot \underline{b}) = \underline{a} \cdot (\alpha \underline{b})$

Igaz-e, hogy $\underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c}$? Általában nem, ugyanis az előbbi vektor $\underline{a}$ -val egyirányú, a második pedig $\underline{c}$ -vel! Ha tehát $\underline{a}$ és $\underline{c}$ nem esik egy egyenesbe, akkor nem állhat fenn az egyenlőség.

A műveleti tulajdonságokat kihasználva megmutatható, hogy tetszőleges két vektor skaláris szorzata Descartes-koordinátákkal: $\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$.

Pl. Mekkora szöget zár be az $\underline{a} = \underline{i} + \underline{k}$ és a $\underline{b} = \underline{j} + \underline{k}$ vektor?

$$|\underline{a}| = \sqrt{2} = |\underline{b}|, \quad \underline{a} \cdot \underline{b} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 60^\circ$$

3.2. Vektoriális szorzat

Az $\underline{a}$ és $\underline{b} \in \mathcal{E}_3$ térvektorok $\underline{a} \times \underline{b}$ -vel jelölt vektoriális szorzatán azt a térvektort értjük, amelynek hossza $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin \gamma$ (vagyis az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor által kifeszített paralelogramma területe), továbbá mind az $\underline{a}$, mind pedig a $\underline{b}$ vektorra merőleges úgy, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{a} \times \underline{b}$ jobbsodrású rendszert alkot. (Ha a páronként egymásra merőlegesen tartott hüvelykujjunk az $\underline{a}$, mutatóujjunk a $\underline{b}$ irányába mutat, akkor a középső ujj mutatja meg $\underline{a} \times \underline{b}$ irányát.)

Vegyük észre, hogy ez a művelet nem kommutatív, ha ugyanis az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektort megcseréljük, azaz a hüvelykujjunk helyet cserél a mutatóujjjal, a középső ujjunk megfordul. A vektor hossza nem változik meg, mert az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor mindkét esetben ugyanazt a paralelogrammát feszíti ki. Így tehát $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$ (úgy fogalmazunk, hogy a vektoriális szorzás antikommutatív művelet).

Műveleti tulajdonságok: bármely $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathcal{E}_3$ vektorra és $\alpha \in \mathbb{R}$ számra

1. $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$
2. $(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}$
3. $(\alpha \underline{a}) \times \underline{b} = \alpha(\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{a} \times (\alpha \underline{b})$
4. $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{c} \cdot \underline{a})\underline{b} - (\underline{b} \cdot \underline{c})\underline{a}$ (kifejtési tétel)

A vektoriális szorzat a Descartes-koordinátákkal:

Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\underline{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\underline{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\underline{k}$$

Kiszámításához érdemes elkészíteni az alábbi táblázatot:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Nevezzük a bal felső sarokból kiinduló átlót főátlónak, a másikat mellékátlónak. A szabály a következő: vesszük a főátlóbeli elemek szorzatát, majd hozzáadjuk az első oszlop legalsó elemének, az első sor második elemének, valamint a harmadik oszlop második elemének a szorzatát, illetve a kapott eredményhez ismét hozzáadjuk az eddig kimaradt elemek szorzatát. Ebből az eredményből ezután kivonjuk a mellékátló elemeinek szorzatát, majd – az előbbi módon – az első sor első elemének, a második sor utolsó elemének, illetve a harmadik sor középső (második) elemének a szorzatát, legvégül pedig az eddig kimaradt elemek szorzatát.

Pl. $\underline{a} = (3, 2, 1)$, $\underline{b} = (4, 5, 6)$

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = (12 - 5)\underline{i} + (4 - 18)\underline{j} + (15 - 8)\underline{k} = (7, -14, 7)$$

3.3. Vegyes (triadikus) szorzat

3.2 Definíció. Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathcal{E}_3$ térvektorok vegyes (vagy triadikus) szorzatán $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) := (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ skalárt értjük.

Ez a művelet tehát nem más mint egy $\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathbb{R}$ típusú leképezés. A vegyes

szorzat abszolút értékben véve a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogatát adja meg.

Vegyük észre, hogy a vektorok sorrendje befolyásolja a vegyes szorzat értékét. A három vektor összesen hat különböző sorrendben írható fel. A sorrend megváltoztatásával a vegyes szorzatnak csak az előjele változhat meg. A különböző sorrendű vegyes szorzatok közötti összefüggést fogalmazza meg a következő, ún. felcserélési tétel.

3.3 Tétel. Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathcal{E}_3$ vektorokra $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{c}, \underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{c}, \underline{a}) = -(\underline{b}, \underline{a}, \underline{c}) = -(\underline{a}, \underline{c}, \underline{b}) = -(\underline{c}, \underline{b}, \underline{a})$.

Az $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ vegyes szorzat kiszámítása Descartes-koordinátákkal egyszerűen elvégezhető az alábbi táblázat segítségével, a vektoriális szorzásnál tanult szabály alkalmazásával:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Pl. $\underline{a} = (1, 0, 1)$, $\underline{b} = (2, -1, 6)$, $\underline{c} = (0, 2, 5)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = 1 \cdot (-1) \cdot 5 + 0 \cdot 6 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 6 - 0 \cdot 2 \cdot 5 = -13$$

Feladatok.

1. Lássuk be, hogy a vektoriális szorzás 2. tulajdonsága a következő sorrendben is fennáll:

$$\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$$

$$\text{Megoldás: } \underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) \stackrel{1. \text{ tul.}}{=} -(\underline{b} + \underline{c}) \times \underline{a} \stackrel{2. \text{ tul.}}{=} -(\underline{b} \times \underline{a} + \underline{c} \times \underline{a}) = -\underline{b} \times \underline{a} - \underline{c} \times \underline{a} \stackrel{1. \text{ tul.}}{=} \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$$

2. Lássuk be a következő azonosságot: $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{c}, \underline{d}, \underline{a})\underline{b} - (\underline{c}, \underline{d}, \underline{b})\underline{a}$

Megoldás: Jelölje $\underline{e}$ a $\underline{c} \times \underline{d}$ vektort.

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{e} = (\underline{e} \cdot \underline{a})\underline{b} - (\underline{b} \cdot \underline{e})\underline{a} = ((\underline{c} \times \underline{d}) \cdot \underline{a})\underline{b} - (\underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{d}))\underline{a} = (\underline{c}, \underline{d}, \underline{a})\underline{b} - (\underline{c}, \underline{d}, \underline{b})\underline{a}$$

4. A komplex számtest

Ebben a fejezetben egy kis kitérőt teszünk: a valós számkör kibővítésével foglalkozunk.

4.1. A komplex számok bevezetése

Láttuk, hogy ha az $\mathbb{R}^2$ halmazt ellátjuk az összeadás és a skalárral való szorzás műveletével, akkor az $\mathbb{R}^2$ ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik, mint a geometriai vektorok halmaza. Ezért $\mathbb{R}^2$ -t ezen két művelettel ellátva vektortérnek neveztük. A skalárral való szorzás műveletét úgy is nevezhetjük, hogy külső számtesttel való szorzás, mert a számpárokat nem számpárokkal, hanem az $\mathbb{R}$ halmaz (számtest) elemeivel szoroztuk.

Most induljunk ki az $\mathbb{R}^2$ halmazból, és definiáljunk rajta más módon műveleteket:

1. Összeadáson értsük ugyanazt, mint a vektortérben: $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$.
2. Két elem egymással való szorzatán (belső szorzás!) értsük a következőt:
$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

Az összeadás tulajdonságai így megegyeznek a valós számok összeadásának tulajdonságaival. A belső szorzást azért definiáljuk ilyen bonyolult módon, hogy egyszerre rendelkezzen a valós számok szorzásának következő négy tulajdonságával:

1. kommutatív
2. asszociatív
3. van olyan számpár (ún. egységelem), amellyel bármely (a, b) számpárt szorozva (a, b) -t kapjuk: ez az $(1, 0)$;
4. minden $(a, b) \neq (0, 0)$ számpárhoz létezik olyan számpár (ún. reciprok elem), amellyel megszorozva az $(1, 0)$ -t kapjuk.

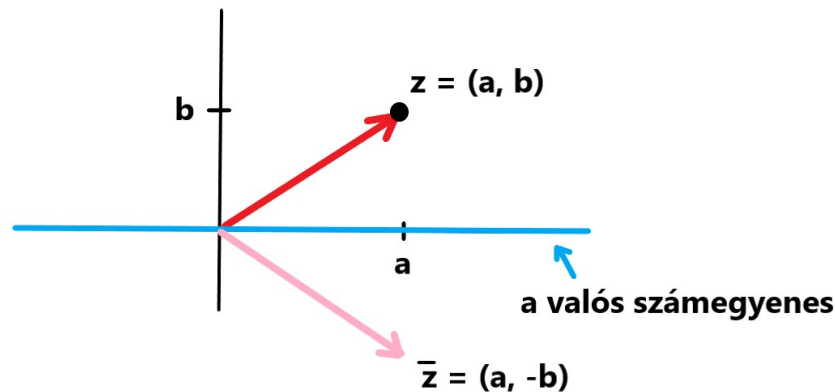
Mivel tehát ezekkel a műveletekkel az $\mathbb{R}^2$ elemei ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a valós számtest, ezért $\mathbb{R}^2$ -t ezen két művelettel ellátva szintén számtestnek nevezzük, az elnevezése: komplex számtest. A komplex számtestet $\mathbb{C}$ -vel jelöljük, és $\mathbb{C}$ elemeit komplex számoknak nevezzük. Az $z = (a, b)$ komplex számban a -t a komplex szám valós részének (jel.: $\operatorname{Re} z$), b -t a komplex szám képzetes részének ($\operatorname{Im} z$) nevezzük. A komplex számokat hasonlóan szemléltethetjük, mint az $\mathbb{R}^2$ -beli vektorokat, lásd a következő ábrát. A valós és a komplex számtest között fontos különbség, hogy a valós számokkal ellentétben a komplex számokon nincsen rendezés, azaz nincs kisebb és nagyobb komplex szám.

A valós számok a komplex számok részének tekinthetők: az a valós számot azonosíthatjuk az $(a, 0)$ komplex számmal. Ezt az azonosítást az indokolja, hogy a valós számok és a nulla képzetes részű komplex számok között művelettartó bijekció van. Ezért egy a valós szám és az $(a, 0)$ komplex szám közé a továbbiakban egyenlőségjelet teszünk.

Egy (a, b) komplex szám $\overline{(a, b)}$ konjugáltján az $(a, -b)$ komplex számot értjük. Pl. $\overline{(2, -3)} = (2, 3)$.

Az (a, b) komplex szám abszolút értékén az $|(a, b)| := \sqrt{a^2 + b^2}$ számot értjük.

A KOMPLEX SZÁMSÍK



Nevezetes komplex szám a $(0, 1)$ (ún. képzetes egység), amelyet i -vel jelölünk. Számítsuk ki i négyzetét!

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

(Az utolsó lépésben azt használtuk fel, hogy a kapott komplex szám a korábbiak értelmében azonosítható a -1 valós számmal, így a kettő közé egyenlőségjelet írtunk.) Van tehát olyan komplex szám, amelynek a négyzete -1 , miközben a valós számok között nem lehetett ilyet találni!

4.2. Komplex számok algebrai alakja

Mutassuk meg, hogy egy (a, b) komplex szám felírható $a + ib$ alakban (algebrai alak)!

$$a + ib = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = (a, 0) + (0 \cdot b - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot b) = (a, 0) + (0, b) = (a, b).$$

Az algebrai alakkal kényelmes számolni. Pl. az $(5, 2)$ és a $(4, 3)$ szám szorzatát így is kiszámíthatjuk:

$$(5 + 2i) \cdot (4 + 3i) = 5 \cdot 4 + 2i \cdot 4 + 5 \cdot 3i + 2i \cdot 3i = 20 + 23i + 6i^2 = 20 + 23i - 6 = 14 + 23i$$

Ez szükségtelenné teszi a szorzási szabály memorizálását.

4.1 Megjegyzés. Mivel komplex számok egymással összeszorozhatók, így $\mathbb{C}$ -n az egész kitevős hatvány fogalma is értelmes. A hatványozásra ugyanazok az azonosságok érvényesek, mint a valós számoké (hiszen ugyanolyan tulajdonságú a szorzásművelet). Így pl. $(z^m)^n = z^{m \cdot n}$, $(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n$ stb.

Pl. $(-i)^2 = ?$

$$(-i)^2 = ((-1) \cdot i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = -1.$$

Azaz a $-i$ -nek is -1 a négyzete, nem csak i -nek. Így írhatjuk:

$$\sqrt{-1} = \pm i$$

Feladatok:

1. Számítsuk ki az $(5, 2)$ és a $(4, 3)$ komplex számok összegét és szorzatát.
 $(5, 2) + (4, 3) = (9, 5)$, $(5, 2) \cdot (4, 3) = (5 \cdot 4 - 2 \cdot 3, 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4) = (14, 23)$ (vagy a fenti módon is számolhatunk)

2. Számítsuk ki a következőket:

$$\text{a.) } z = i^{1994} \quad \text{b.) } z = |\overline{1 + i}| \quad \text{c.) } z = \frac{3 - 4i}{2 - i}$$

Megoldás:

$$\text{a.) } (i^2)^{997} = (-1)^{997} = -1$$

$$\text{b.) } \sqrt{2}$$

$$\text{c.) } \frac{3 - 4i}{2 - i} = \frac{3 - 4i}{2 - i} \cdot \frac{2 + i}{2 + i} = \frac{(3 - 4i)(2 + i)}{4 - i^2} = \frac{(3 - 4i)(2 + i)}{5} = \frac{6 - 8i + 3i - 4i^2}{5} = \frac{10 - 5i}{5} = 2 - i$$

Komplex számokat ugyanúgy szokásos az abszolút érték és az irányszög segítségével megadni, ahogy a síkvektorokat. Ha az (a, b) komplex szám abszolút értéke r , szöge ϕ , akkor $(a, b) = (r \cos \phi, r \sin \phi) = r \cos \phi + ir \sin \phi = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ (trigonometrikus alak). A trigonometrikus alakkal igen kényelmesen elvégezhető a szorzás és az osztás:

$$r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot p(\cos \beta + i \sin \beta) = rp(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$$

$$\frac{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{p(\cos \beta + i \sin \beta)} = \frac{r}{p}(\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta))$$

Pl. legyen $z_1 = 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$, $z_2 = 3(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$. Mivel egyenlő $z_1 \cdot z_2$ és $\frac{z_1}{z_2}$?

$$z_1 \cdot z_2 = 6(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$$

A szorzásból következik az egész kitevős hatvány képlete:

$$z^n = [r(\cos \phi + i \sin \phi)]^n = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

Egy komplex szám n -edik hatványa egyértelmű, n -edik gyökből azonban n db van (ezek között lehetnek egyenlők is):

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\phi + k2\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + k2\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Pl. $\sqrt{i} = ?$

Mivel $i = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ$, így

$$\sqrt{i} = \sqrt{1} \left(\cos \frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{2} + i \sin \frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{2} \right), \quad k = 0, 1,$$

$$\text{azaz } \sqrt{i} = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

4.3. Másodfokú egyenletek megoldása a komplex számok halmazán

Középiskolában sokat tanultunk a másodfokú egyenletekről, amelyek általános alakja

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

ahol a , b és c rögzített valós számok. Ennek megoldását akkor még csak a valós számok halmazán kerestük, hiszen más számokat nem ismertünk. Láttuk: a valós számok halmazán akkor és csak akkor létezik megoldás, ha

$$D = b^2 - 4ac \geq 0.$$

Vegyük észre azonban, hogy az egyenletben x helyébe komplex számot is van értelme behelyettesíteni! Egy másodfokú egyenletnek mindig van megoldása a komplex számok halmazán, legfeljebb két különböző. A megoldás meghatározására a szokásos megoldóképletet használhatjuk (ugyanis a levezetés minden lépése komplex esetben is működik). Míg negatív diszkrimináns esetén nincs valós megoldás, komplex megoldásból kettő is van, mert egy negatív számnak két komplex négyzetgyöke van. A -1 négyzetgyökei pl., mint láttuk, az i és a $-i$.

Pl. Oldjuk meg a $z^2 + 3z + 4 = 0$ egyenletet!

$$z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-1}\sqrt{7}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i.$$

4.2 Megjegyzés. *Ha két komplex gyök van, akkor azok mindig egymás konjugáltjai. (Megjegyezzük, hogy ez a megállapítás már nem igaz akkor, ha megengedjük, hogy a , b ill. c komplex is lehessen.)*

5. Lineáris algebrai egyenletrendszerek

A félév hátralévő részének fő témája egy fontos feladattípus, a lineáris egyenletrendszer tárgyalása. Ehhez szükségünk lesz az $\mathbb{R}^n$ -beli vektor és a Matematikából már tanult mátrix fogalmára. Emlékeztetőül: $m \times n$ -es mátrixnak hívunk egy m sorból és n oszlopból álló számtáblázatot. Érdeemes lesz ismernünk a következő néhány speciális mátrixfajtát:

- Az $1 \times n$ -es mátrixokat **sormátrix**nak nevezzük.
- Az $n \times 1$ -es mátrixokat **oszlopmátrix**nak nevezzük.
- Az $n \times n$ -es mátrixokat **négyzetes (kvadratikus)** mátrixnak nevezzük. A gyakorlatban ez utóbbiak a legfontosabbak.

A négyzetes mátrixokon belül további speciális mátrixokat definiálunk.

- **Diagonális mátrix:** A főátlóján kívül minden eleme nulla, vagyis $a_{ij} = 0$, ha $i \neq j$, pl. **identitásmátrix** vagy **egység mátrix** (a főátlóban egyesek). (A főátlóban nem muszáj nullától különböző elemeknek lenniük, lehetnek ott is nullák...)

Pl.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Szimmetrikus mátrix:** a főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő elemek egyenlők, azaz $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. (A főátlóban tetszőleges elemek lehetnek.)

Pl.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

- **Antiszimmetrikus mátrix:** a főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő elemek egymás (-1) -szeresei, azaz $a_{ij} = -a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. (Mivel ezt minden $i, j = 1, \dots, n$ indexpárra előírjuk, így $a_{ii} = -a_{ii}$, $i = 1, \dots, n$ is beleértendő ebbe, amiből az következik, hogy a főátlóban nullák vannak!)

Pl.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Háromszögmátrixok:** felsőháromszög-mátrix: $a_{ij} = 0$, ha $i > j$, ill. alsóháromszög-mátrix: $a_{ij} = 0$, ha $i < j$.

Pl. felsőháromszög-mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

(A főátló fölött is lehetnek nullák, de alatta szigorúan csak nullák lehetnek.)

Pl. alsóháromszög-mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

(A főátló alatt is lehetnek nullák, de fölötté szigorúan csak nullák lehetnek.)

5.1. A lineáris algebrai egyenletrendszer fogalma

5.1 Definíció. *Lineáris algebrai egyenletrendszernek (röviden lineáris egyenletrendszernek) nevezzük az*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

alakú egyenletrendszereket, ahol $x_1, x_2, \dots, x_n$ az ismeretlen valós (vagy komplex) számok, a_{ij} ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) (az ismeretlenek együtthatói), és $b_1, b_2, \dots, b_m$ (az ún. szabad tagok) adott valós (vagy komplex) számok.

Pl. a következő egyenletrendszer egy két egyenletről álló ($m = 2$) kétismeretlenes ($n = 2$) lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 3 \\2x_1 + 2x_2 &= 5\end{aligned}$$

5.2 Definíció. Az (1) lineáris egyenletrendszer egy megoldásának nevezzük az n számból álló $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ rendszert, ha az $x_i = \lambda_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) helyettesítéssel mindegyik egyenletben azonosságot kapunk.

A lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatban a következő alapkérdéseket fogalmazhatjuk meg:

1. Megoldható-e az egyenletrendszer?
2. Ha igen, hány megoldása van? (Megoldani az egyenletrendszert azt jelenti, hogy meghatározzuk az összes megoldását!)
3. Hogyan határozható(k) meg a megoldás(ok)?

5.3 Definíció. (Homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszer)

Ha $b_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ (vagyis az összes szabad tag nulla az egyenletrendszerben), akkor **homogén**, egyébként **inhomogén** lineáris egyenletrendszerről beszélünk.

A továbbiakban gyakran alkalmazzuk az egyenletrendszer rövidített jelölésmódját.

5.4 Definíció. Az

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

mátrixot az (1) lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixának nevezzük.

Vezessük be az

$$\underline{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{b} := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

jelöléseket is. Ezek segítségével (1) felírható

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad (2)$$

alakban, és az egyenletrendszer megoldása azt jelenti, hogy meghatározzuk mindazon $\underline{x}$ vektorokat, amelyek kielégítik a (2) egyenlőséget.

Pl. 1. Mely egyenletrendszernek felel meg az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenlet, ha

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}?$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2. Írjuk fel az

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszer együtthatómátrixát!

Megoldás:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldhatóságának vizsgálatában szükségünk lesz egy, a négyzetes mátrixokhoz rendelhető szám, az ún. determináns ismeretére. A továbbiakban ennek értelmezésével foglalkozunk.

5.2. Mátrixok determinánsa

A determináns fogalmát négyzetes mátrixokra értelmezzük. Kezdjük az $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ esettel!

5.5 Definíció. (2×2 -es mátrix determinánsa)

Az $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ számot az

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

mátrix **determinánsának** nevezzük. Jelölése: $|A|$, $\det A$ vagy $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

A 3×3 -as mátrixokra a definíció a következő.

5.6 Definíció. Az $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ számot az $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrix determinánsának nevezzük (harmadrendű determináns). Je-

lölése: $|A|$, $\det A$ vagy $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

5.7 Megjegyzés. A definícióban szereplő hat tagú összeg a vektoriális és a vegyes szorzat Descartes-koordinátás alakjánál már látott módon számítható az A mátrix elemeiből.

Vegyük észre, hogy a 3×3 -as mátrixok determinánsa összerakható 2×2 -es determinánssokból:

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Azt mondjuk, hogy a determinánst kifejtettük az első sor szerint. Ez általánosabban is igaz: Legyen i egy tetszőleges index ($i \in \{1, 2, 3\}$). Ekkor

$$\det A = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|,$$

ahol $|A_{ij}|$ annak a mátrixnak a determinánsa, amelyet A -ból úgy kapunk, hogy az a_{ij} elemet tartalmazó sort és oszlopot elhagyjuk. (A determinánst kifejtjük az i -edik sor szerint.) Itt $|A_{ij}|$ neve: az a_{ij} elemhez adjungált aldetermináns. Az $(-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$ kifejezést előjeles adjungált aldeterminánsnak nevezzük, és erre az $|A_{ij}|^\pm$ jelölést fogjuk alkalmazni. Megjegyezzük, hogy nemcsak bármelyik sor, hanem bármelyik oszlop szerint is kifejthető a determináns.

Ez az eljárás, amellyel a harmadrendű determináns kiszámítását visszavezetjük másodrendű determinánsok kiszámítására, lehetőséget ad az n -edrendű determináns értelmezésére, ahol $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges.

5.8 Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix determinánsának nevezzük a

$$\det A := \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

számot, ahol $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tetszőleges sorindex.

A fenti képletben az A_{ij} mátrix $(n-1) \times (n-1)$ -es. (Belátható, hogy valóban tetszőleges sorindexet választva ugyanahhoz a számhoz jutunk, tehát értelmes a definíció. Sőt, oszlop szerint kifejtve is ugyanahhoz a számhoz jutunk.) Így egy n -ed rendű determináns $n!$ tagú összegből áll.

A determinánst csak négyzetes mátrixokra értelmezzük. Tetszőleges mátrixnak vannak viszont aldeterminánsai.

5.9 Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix k -ad rendű aldeterminánsának nevezzük minden olyan k -ad rendű determinánst, amelyet úgy kapunk, hogy az A mátrixból kiválasztunk k darab sort és k darab oszlopot ($k \leq \min(m, n)$), és az ezek kereszteződéseiben lévő elemekből összeállított mátrix determinánsát képezzük.

5.2.1. A determináns tulajdonságai

Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok determinánsára igazak a következő tulajdonságok.

1. $\det A = \det A^T$, vagyis a transzponálással nem változik meg a mátrix determinánsa.
Biz.: $\det A$ -t az i -edik sor és $\det A^T$ -t az i -edik oszlop szerint kifejtve ugyanazt kapjuk.
2. Egy A mátrix determinánsa akkor és csak akkor nulla, ha A sor- vagy oszlopvektorai lineárisan összefüggők.
3. Két sor felcserélésével a determináns előjele ellentétesre változik.
4. $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

5.2.2. Speciális mátrixok determinánsa

- Az $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ identitásmátrixra $\det I = 1$.
- Diagonális és háromszögmátrixok determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

5.3. Az inverz mátrix

5.10 Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot **invertálhatónak** nevezzük, ha létezik olyan $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, amelyre $A \cdot X = I$, ahol I az $n \times n$ -es identitásmátrix. Ekkor az X mátrixot az A mátrix **inverzének** nevezzük és A^{-1} -gyel jelöljük.

Megjegyzés. Megmutatható, hogy ha $A \cdot X = I$, akkor $X \cdot A = I$ is automatikusan teljesül, tehát az inverz mátrixra $A \cdot A^{-1} = I$ és $A^{-1} \cdot A = I$. Az inverz mátrixra szükségünk lesz a lineáris egyenletrendszerek megoldásának felírásakor. Ezért ebben az alfejezetben

megvizsgáljuk, hogy mikor létezik egy A mátrixnak inverze, és az hogyan határozható meg.

Könnyen meggondolható, hogy ha A -nak létezik inverze, akkor az egyértelmű. Tegyük fel ugyanis, hogy A -nak két inverze is létezik, A^{-1} és $\tilde{A}^{-1}$. Ekkor

$$A \cdot \tilde{A}^{-1} = I.$$

Szorozzuk meg az egyenlőség mindkét oldalát balról a másik inverzzel, azaz A^{-1} -gyel:

$$A^{-1} \cdot A \cdot \tilde{A}^{-1} = A^{-1} \cdot I.$$

A jobb oldalon A^{-1} áll, ugyanis az identitásmátrixszal tetszőleges $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot szorozva (bármilyen sorrendben) M -et kapjuk. A bal oldalon $A^{-1} \cdot A \cdot \tilde{A}^{-1} = (A^{-1} \cdot A) \cdot \tilde{A}^{-1} = I \cdot \tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}$. Ebből $\tilde{A}^{-1} = A^{-1}$, vagyis a két inverz mátrix nem lehet különböző, csak egy inverz mátrix létezik.

Vizsgáljuk meg, hogy mikor létezik A^{-1} .

5.11 Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot szingulárisnak nevezzük, ha $\det A = 0$, és regulárisnak, ha $\det A \neq 0$.

5.12 Állítás. Szinguláris mátrixnak nem létezik inverze.

Biz.: Ha létezne inverze, akkor a determináns 4. tulajdonsága miatt $\det A \cdot \det A^{-1} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$ lenne, de ha $\det A = 0$, akkor ez nem lehetséges.

Megmutatjuk, hogy ha A reguláris, akkor létezik A^{-1} , és meg is adjuk az elemeit.

5.13 Definíció. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Jelölje $A^* = (a_{ij}^*)$ azt az $n \times n$ -es mátrixot, amelyre $a_{ij}^* = |A_{ji}|^\pm$. Ezt az A^* mátrixot az A mátrix adjungált mátrixának nevezzük.

$$A^* = \begin{bmatrix} |A_{11}|^\pm & |A_{21}|^\pm & \dots & |A_{n1}|^\pm \\ |A_{12}|^\pm & |A_{22}|^\pm & \dots & |A_{n2}|^\pm \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ |A_{1n}|^\pm & |A_{2n}|^\pm & \dots & |A_{nn}|^\pm \end{bmatrix}$$

5.14 Állítás. Az A mátrixnak és az A^* adjungált mátrixnak a szorzata olyan diagonál-mátrix, amelynek főátlóbeli elemei az A determinánsával egyenlők, azaz

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \det A \end{bmatrix}.$$

Biz.: Végezzük el a mátrixszorzást! A szorzatmátrix i -edik sorában és j -edik oszlopában a

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^n a_{ik} |A_{jk}|^{\pm}$$

szám áll.

- Ha $i = j$, akkor $c_{ij} := \sum_{k=1}^n a_{ik} |A_{ik}|^{\pm}$, ami egyenlő $\det A$ -val, mivel ez az összeg éppen az A mátrix determinánsának az i -edik sor szerinti kifejtése.
- Ha $i \neq j$, akkor $c_{ij} = 0$, ugyanis ekkor a c_{ij} összeg azon mátrix determinánsának a kifejtése, amelyet A -ból úgy kapunk, hogy a j -edik sorába az i -edik sorát tesszük. Ennek a mátrixnak i -edik és j -edik sorában megegyeznek az elemek, ezért a determinánsa nulla.

5.15 Következmény. Ha $\det A \neq 0$, akkor fennáll az

$$\frac{1}{\det A} \cdot A \cdot A^* = \frac{1}{\det A} \cdot A^* \cdot A = I$$

egyenlőség, amelyből azonnal látható, hogy A -nak létezik inverze, és

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{|A_{11}|^{\pm}}{\det A} & \frac{|A_{21}|^{\pm}}{\det A} & \cdots & \frac{|A_{n1}|^{\pm}}{\det A} \\ \frac{|A_{12}|^{\pm}}{\det A} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{|A_{1n}|^{\pm}}{\det A} & \cdot & \cdot & \frac{|A_{nn}|^{\pm}}{\det A} \end{bmatrix}.$$

Tehát A^{-1} i -edik sorában az A mátrix i -edik oszlopában lévő elemekhez tartozó előjeles adjungált aldeterminánsok állnak, $\det A$ -val osztva.

Ha $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, akkor az adjungált mátrixát egyszerű felírni. Számítsuk ki általánosan az adjungált mátrix elemeit. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Az adjungált aldeterminánsok 1×1 -es mátrixok determinánsai lesznek. Az 1×1 -es mátrixok a valós számok, az ilyen mátrix determinánsa saját maga. Ennek megfelelően

az adjungált mátrix elemei:

$$\begin{aligned}a_{11}^* &= |A_{11}|^\pm = (-1)^{1+1}a_{22} = a_{22} \\a_{12}^* &= |A_{21}|^\pm = (-1)^{2+1}a_{12} = -a_{12} \\a_{21}^* &= |A_{12}|^\pm = (-1)^{1+2}a_{21} = -a_{21} \\a_{22}^* &= |A_{22}|^\pm = (-1)^{2+2}a_{11} = a_{11}\end{aligned}$$

Tehát az adjungált mátrix:

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Azt vehetjük tehát észre, hogy a 2×2 -es A mátrix adjungált mátrixát úgy írhatjuk fel, hogy megcseréljük a főátlóban lévő számokat, a másik kettőt pedig az ellentettjére változtatjuk. Az A inverzének a kiszámításához ne felejtsük el az A^* összes elemét $\det A$ -val leosztani.

5.4. A Cramer-szabály

Korábban bevezettük a lineáris egyenletrendszerek rövidített jelölésmódját. Ennek alapján egy $n \times n$ -es mátrixú lineáris egyenletrendszer az

$$A\underline{x} = \underline{b} \tag{3}$$

alakba írható, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, és $\underline{x}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$.

Tegyük fel, hogy az A mátrix reguláris, azaz $\det A \neq 0$. Ekkor a korábbiak értelmében létezik A^{-1} . Szorozzuk meg az (3) egyenletet balról az A^{-1} mátrixszal! Így az

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$

egyenlethez jutunk.

A jobb oldalon álló vektor j -edik elemét ($j = 1, 2, \dots, n$) az

$$\frac{|A_{1j}|^\pm}{\det A}b_1 + \frac{|A_{2j}|^\pm}{\det A}b_2 + \dots + \frac{|A_{nj}|^\pm}{\det A}b_n = \frac{1}{\det A}(|A_{1j}|^\pm b_1 + \dots + |A_{nj}|^\pm b_n) = \frac{\det A_j}{\det A}$$

összefüggés adja meg, ahol A_j -vel a következő mátrixot jelöltük:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(Az eredeti A mátrix j -edik oszlopát kicseréltük $\underline{b}$ -re.) Tehát a j -edik ismeretlen előáll

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

alakban.

Összefoglalva, ha a lineáris egyenletrendszerben az együtthatómátrix négyzetes (tehát ugyanannyi egyenlet van, ahány ismeretlen), és reguláris az együtthatómátrix, akkor az egyenletrendszernek létezik egyetlen megoldása, és az felírható a Cramer-szabály segítségével determinánsok hányadosaként. Megjegyezzük, hogy ennek a megoldási módszernek inkább elméleti jelentősége van, a gyakorlatban nem szokás alkalmazni, mert a determináns kiszámítása nagyobb méretű mátrixoknál már meglehetősen időigényes.

5.5. A lineáris algebrai egyenletrendszerek általános elmélete

Az előző fejezetben bevezettük a lineáris algebrai egyenletrendszerekkel kapcsolatos legfontosabb alapfogalmakat. Ebben a fejezetben választ kapunk arra a kérdésre, hogy egy tetszőleges lineáris egyenletrendszerről hogyan dönthetjük el, hogy megoldható-e vagy sem, és ha megoldható, hány megoldása van.

5.5.1. A mátrix rangja

A mátrix rangjának a fogalma a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának vizsgálatában lesz segítségünkre.

5.16 Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix rangján az egymással lineárisan független rendszert alkotó oszlopvektorok maximális számát értjük a mátrixban. Jelölése: $\text{rang}(A)$.

Pl. mennyi a rangja a következő mátrixoknak?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az A mátrix három oszlopvektora lineárisan független rendszert alkot, ezért $\text{rang}(A) = 3$. A B mátrixban a három oszlopvektor összefüggő (köztük van a nullvektor), ezért a rang csak 3-nál kisebb lehet. Az $(1, 0, 0)$ és a $(0, 1, 0)$ oszlopvektor lineárisan független, ezért a rang 2. A C mátrixban az $(1, 0)$ és $(0, 1)$ oszlop lineárisan független, a három oszlopvektor azonban már lineárisan összefüggő, így $\text{rang}(C) = 2$.

Nyilvánvalóan, ha $A = 0$ (nullmátrix), akkor a rangja 0.

A rangot a legtöbb esetben nehéz a fenti definíció alapján kiszámítani. Ezért hasznos a következő tétel, amely lehetővé teszi, hogy egy mátrix rangját az aldeterminánsainak a vizsgálatával határozzuk meg.

5.17 Tétel. (*Mátrixok rangszámtétele*)

Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixban a legmagasabb rendű nemnulla aldetermináns rendje egyenlő az A rangjával.

Biz.: Jelölje r a legmagasabb rendű nemnulla aldetermináns rendjét. (Ez azt jelenti, hogy a mátrixban található olyan $r \times r$ -es aldetermináns, amelynek az értéke nemnulla, de minden annál nagyobb méretű aldeterminánsa nulla.) Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az egyik ilyen r -edrendű aldetermináns a mátrix bal felső sarkában foglal helyet. (A bizonyítás menetéből látható, hogy ez nem jelenti az általánosság megszorítását.) Jelölje ezt a nullától különböző aldeterminánst D . Abból, hogy $D \neq 0$, következik, hogy a mátrix első r oszlopa lineárisan független. (Ha ez nem lenne igaz, akkor a D aldetermináns oszlopai is lineárisan összefüggők volnának, és ekkor $D = 0$ lenne.)

Legyen $l \in \{r+1, \dots, n\}$ tetszőleges index, és mutassuk meg, hogy az l -edik oszlop kifejezhető az első r oszlop lineáris kombinációjaként. (Ez éppen azt jelenti, hogy a rang r .) Legyen $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ tetszőleges index, és jelölje Δ_i a

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1r} & a_{1l} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{r1} & \cdot & \cdot & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{i1} & \cdot & \cdot & a_{ir} & a_{il} \end{vmatrix}$$

determinánst. Ennek értéke nulla, ugyanis

- ha $i > r$, akkor Δ_i az A mátrix $(r+1)$ -edrendű aldeterminánsa, amiről feltettük, hogy nulla;
- ha pedig $i \leq r$, akkor Δ_i két sora egyenlő.

Fejtsük ki a Δ_i determinánst az utolsó sora szerint. Írjuk fel először a kifejtésben szereplő előjeles adjungált aldeterminánsokat:

$$|A_{ij}| = (-1)^{(r+1)+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdot & a_{1r} & a_{1l} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \cdot & a_{r,j-1} & a_{r,j+1} & \cdot & a_{rr} & a_{rl} \end{vmatrix}, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$|A_{il}| = (-1)^{2(r+1)} \cdot D = D.$$

Mivel az $|A_{ij}|$, $j = 1, \dots, r$ összegek függetlenek i -től, ezért $|A_{ij}|$ helyett alkalmazzuk az $|A_{(j)}|$ jelölést. Így a Δ_i determináns felírható a

$$\Delta_i = a_{i1}|A_{(1)}| + a_{i2}|A_{(2)}| + \dots + a_{ir}|A_{(r)}| + a_{il}D$$

alakban. Ebből, felhasználva, hogy $D \neq 0$, az

$$a_{il} = -\frac{|A_{(1)}|}{D}a_{i1} - \frac{|A_{(2)}|}{D}a_{i2} - \dots - \frac{|A_{(r)}|}{D}a_{ir}$$

összefüggést nyerjük. Mivel az itt szereplő együtthatók i -től függetlenek, ezért az egész l -edik oszlop az első r oszlop $-\frac{|A_{(1)}|}{D}$, $-\frac{|A_{(2)}|}{D}$, $\dots$, $-\frac{|A_{(r)}|}{D}$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja.

A bizonyításból látszik, hogy ha találtunk egy r -edrendű nemnulla aldeterminánst, és az **ezt tartalmazó** $(r + 1)$ -edrendű aldeterminánsok már mind nullák, akkor a mátrix rangja r . Ezért a mátrix rangját úgy számítjuk ki, hogy az alacsonyabb rendű aldeterminánstól a magasabb rendűek felé haladunk.

5.18 Megjegyzés. *A rangszámtételből és abból, hogy a mátrix transzponálásával nem változnak meg az aldeterminánsai, következik, hogy a rang definíciójában oszlopvektorok helyett sorvektorokat is írhatunk. (Vagyis a lineárisan független oszlopvektorok maximális száma mindig pontosan egyenlő a lineárisan független sorvektorok maximális számával.)*

Mindezekből következik, hogy egy mátrixnak nem lehet nagyobb a rangja, mint ahány sora és ahány oszlopa van, azaz $\text{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$. Egy 2×3 -as mátrixnak például legfeljebb 2 lehet a rangja, egy 5×3 -asnak legfeljebb 3, és egy $n \times n$ -esnek legfeljebb n .

5.5.2. Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

Ebben az alfejezetben megfogalmazzuk, hogy mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy lineáris egyenletrendszernek létezzen megoldása.

Tekintsük az

$$A\underline{x} = \underline{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{b} \in \mathbb{R}^m \quad (4)$$

lineáris egyenletrendszert.

5.19 Definíció. Az

$$A_b := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad (5)$$

mátrixot a (4) lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixának nevezzük.

Mivel ezt a mátrixot az A mátrixból úgy kaptuk, hogy egy oszloppal kiegészítettük, ezért vagy megegyezik a két mátrix rangja, vagy a kibővített mátrixé eggyel nagyobb, mint az együtthatómátrixé.

5.20 Tétel. (*Kronecker–Capelli-tétel*)

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor létezik megoldása, ha $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_b)$.

Bizonyítás helyett tekintsünk néhány példát szemléltetésül!

Pl. 1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 5 \end{cases}$$

Első látásra feltűnik, hogy ellentmondóak az egyenletek, mert a második egyenlet bal oldala az első egyenlet bal oldalának a 2-szerese, a jobb oldalon azonban a 3-nak az 5 nem a kétszerese, hanem az $5/3$ -szorosa. Hogy tükrözi ezt az ellentmondást az A és az A_b rangjának a viszonya? Az együtthatómátrix és a kibővített mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Az A mátrix sorai lineárisan összefüggőek, mert az első sornak a második sor a kétszerese, az A_b mátrix két sora viszont nem egymás számszorosa, így ennek két sorvektora már lineárisan független. Így $\text{rang}(A) = 1 \neq \text{rang}(A_b) = 2$, tehát a Kronecker–Capelli-tétel szerint nem létezik megoldás.

Pl. 2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 6 \end{cases}$$

Most az együtthatómátrix és a kibővített mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ebben a példában ez előzőhöz képest annyi a változás, hogy a második egyenlet szabad tagját 5-ről 6-ra cseréltük. Nyilván itt végtelen sok megoldás lesz, mert az első egyenletet végtelen sok számpár kielégíti, és ezek automatikusan eleget tesznek a második egyenletnek is. Az A nem változott, az A_b -ben azonban ugyanúgy kétszerese a második sor az elsőnek, mint az A -ban, így $\text{rang}(A) = 1 = \text{rang}(A_b)$. Tehát a Kronecker–Capelli-tétel

szerint is van megoldás.

Pl. 3.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{cases}$$

Most az együtthatómátrix és a kibővített mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ha az első egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent, és behelyettesítjük a második egyenletbe, akkor könnyen meg tudjuk oldani ezt az egyenletrendszert, és egyetlen megoldást kapunk: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Az A mátrixban most már függetlenek a sorok, csakúgy, mint az A_b -ben, így mindkettőnek 2 a rangja, így a Kronecker–Capelli-tétel szerint is létezik megoldása.

5.5.3. A megoldások száma

A Kronecker–Capelli-tétel csak a megoldás létezéséről szól, a megoldások számáról nem. Látni fogjuk, hogy a megoldások számát illetően a fenti három típus lefedi az összes lehetséges esetet, ami csak előfordulhat.

Vizsgáljuk meg, hogy mitől függ a megoldások száma! Legyen $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_b) = r$. Ekkor az A és az A_b mátrixban egyaránt r darab lineárisan független sor van, ami egyben azt is jelenti, hogy az egyenletrendszerben csak r darab egyenlet független egymástól; a maradék $m - r$ darab egyenlet nem jelent új feltételt, és ilyen értelemben felesleges. Tegyük fel, hogy ezek az utolsók (ha nem így van, a bizonyítás további menete akkor is alkalmazható). Az m darab egyenletből álló (4) rendszer tehát helyettesíthető egy r darab egyenletet tartalmazó

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n &= b_r \end{aligned} \tag{6}$$

alakú egyenletrendszerrel. Elegendő ennek a megoldásait meghatározni.

Nyilvánvalóan r legfeljebb az ismeretlenek számával egyenlő, azaz $r \leq n$. A (6) megoldásainak számát illetően két eset lehetséges:

– Ha $r = n$, akkor a (6) rendszerben ugyanannyi egyenlet van, mint ahány ismeretlen,

és az együtthatómátrix determinánsa nemnulla, következésképpen az egyenletrendszernek létezik megoldása, és a megoldás egyértelmű.

– Ha $r < n$, akkor tegyük fel, hogy a nemnulla r -edrendű aldetermináns például az első r darab ismeretlen együtthatóiból áll. Vigyük át a jobb oldalra az $x_{r+1}, \dots, x_n$ ismeretleneket tartalmazó tagokat, és adjunk az $x_{r+1}, \dots, x_n$ ismeretleneknek tetszőleges $c_{r+1}, \dots, c_n$ értékeket. Így az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1,r+1}c_{r+1} - \dots - a_{1n}c_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r &= b_2 - a_{2,r+1}c_{r+1} - \dots - a_{2n}c_n \\ &\vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{r,r+1}c_{r+1} - \dots - a_{rn}c_n \end{aligned} \quad (7)$$

egyenletrendszerhez jutunk, és ennek már létezik egyetlen $x_1, \dots, x_r$ megoldása. Ezek a tetszőlegesen megválasztott $c_{r+1}, \dots, c_n$ paraméterek függvényei, ezért ebben az esetben végtelen sok megoldás van.

Vegyük észre, hogy más eset nem lehetséges, tehát ha megoldható a lineáris egyenletrendszer, akkor vagy egy megoldása van, vagy végtelen sok megoldása van.

A fenti eredményeket a következőkben foglalhatjuk össze.

- Ha $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A_b)$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.
- Ha $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_b) = n$, azaz a közös rang egyenlő az ismeretlenek számával, akkor az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van.
- Ha $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_b) < n$, azaz a közös rang kisebb az ismeretlenek számánál, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

5.5.4. Homogén lineáris egyenletrendszerek

Tekintsük az

$$A\underline{x} = \underline{0}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{0} \in \mathbb{R}^m \quad (8)$$

homogén lineáris egyenletrendszert.

A Kronecker–Capelli-tételből következik, hogy (8) mindig megoldható, mivel a $\underline{0}$ oszlop hozzávétele nem növelheti a mátrix rangját. Könnyen látható az is, hogy az $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ számok mindig kielégítik az egyenletrendszert; ez az egyenletrendszer ún. triviális megoldása.

Legyen az A mátrix rangja r .

Ha $r = n$, akkor az előző fejezet értelmében egyetlen megoldás van, azaz csak a triviális

megoldás létezik.

Ha $r < n$, akkor végtelen sok megoldás van, vagyis ekkor léteznek nemtriviális megoldások is.

Speciálisan, n egyenletből álló n ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor létezik nemtriviális megoldása, amikor $\det A = 0$ (mivel ez azt jelenti, hogy $\text{rang}(A) < n$). Ha pedig $m < n$, azaz kevesebb egyenlet van, mint ahány ismeretlen, akkor $\text{rang}(A) < n$ miatt vannak nemtriviális megoldások is.

A homogén lineáris egyenletrendszerek a következő speciális tulajdonságokkal rendelkeznek:

1. Ha a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rendszer megoldása (8)-nek, akkor tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha \cdot \lambda_1, \dots, \alpha \cdot \lambda_n$ is megoldás.

Biz.: Jelölje $\underline{\lambda}$ a $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ vektort. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ megoldása (8)-nak $\Rightarrow A\underline{\lambda} = \underline{0}$. Ekkor tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $A(\alpha\underline{\lambda}) = \alpha(A\underline{\lambda}) = \alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$, azaz $\alpha \cdot \lambda_1, \dots, \alpha \cdot \lambda_n$ is megoldás.

2. Ha $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ és $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$ is megoldása (8)-nak, akkor $\lambda_1 + \tilde{\lambda}_1, \dots, \lambda_n + \tilde{\lambda}_n$ is megoldás.

Biz.: Legyen $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ és $\tilde{\underline{\lambda}} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_n)$. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ és $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$ is megoldása (8)-nak $\Rightarrow A\underline{\lambda} = \underline{0}$ és $A\tilde{\underline{\lambda}} = \underline{0}$. $\Rightarrow A(\underline{\lambda} + \tilde{\underline{\lambda}}) = A\underline{\lambda} + A\tilde{\underline{\lambda}} = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$.

3. A fentiek következménye, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak tetszőleges lineáris kombinációja is megoldása az egyenletrendszernek.

5.5.5. Kapcsolat a homogén és az inhomogén lineáris egyenletrendszerek megoldásai között

Tekintsük az

$$A\underline{x} = \underline{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{b} \in \mathbb{R}^m \quad (9)$$

lineáris egyenletrendszert. Kapcsolatot keresünk ezen inhomogén rendszer és az A együtthatómátrixú

$$A\underline{x} = \underline{0} \quad (10)$$

homogén rendszer megoldásai között.

5.21 Állítás. A (10) egy tetszőleges megoldásának és a (9) egy tetszőleges megoldásának összege megoldása (9)-nek.

Biz.: Legyen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ megoldása (9)-nek, $\mu_1, \dots, \mu_n$ pedig (10)-nek. Ekkor a $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ és $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ jelöléssel $A\underline{\lambda} = \underline{b}$ és $A\underline{\mu} = \underline{0}$. $\Rightarrow A(\underline{\lambda} + \underline{\mu}) = A\underline{\lambda} + A\underline{\mu} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$, vagyis a $\underline{\lambda} + \underline{\mu}$ vektor elemei, a $\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_n$ számok megoldása (9)-nek.

5.22 Állítás. (9) bármely két megoldásának különbsége megoldása (10)-nek.

Biz.: Legyenek $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ és $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$ megoldásai (9)-nek. Ekkor a $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ és $\tilde{\underline{\lambda}} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n)$ jelöléssel $A\underline{\lambda} = \underline{b}$ és $A\tilde{\underline{\lambda}} = \underline{b} \Rightarrow A(\underline{\lambda} - \tilde{\underline{\lambda}}) = A\underline{\lambda} - A\tilde{\underline{\lambda}} = \underline{b} - \underline{b} = \underline{0}$ azaz $\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1, \dots, \lambda_n - \tilde{\lambda}_n$ megoldása (10)-nek.

5.23 Következmény. Az inhomogén lineáris egyenletrendszer összes megoldását megkapjuk, ha egy tetszőleges megoldásához hozzáadjuk a megfelelő homogén rendszer minden egyes megoldását.

6. Gyakorlati módszerek lineáris egyenletrendszerek megoldására

A reguláris négyzetes mátrixú lineáris egyenletrendszerek egyik megoldási módszeréről már esett szó: ez a Cramer-szabály, amelynek segítségével az ismeretleneket közvetlenül kiszámíthatjuk az egyenletrendszer együtthatóiból és szabad tagjaiból. Ezt a módszert a gyakorlatban szinte sohasem alkalmazzák, mivel az ismeretlenek determinánsok hányadosaként állnak elő, és a determinánsszámítás – különösen nagyméretű mátrixok esetén – rendkívül műveletigényes. Egy darab $n \times n$ -es determináns kifejtésekor ugyanis, ha csak az al-determinánsok számításigényét nézzük, $n!$ számú szorzást kell elvégeznünk. $n = 50$ esetén ez $50!$, azaz több mint 10^{64} darab szorzást jelent. Ennek a számnak az érzékeltetésére végezzünk el egy egyszerű gondolat kísérletet! Képzeljünk el egy olyan számítógépet, amely 10^{-10} méter méretű számológységekből áll, és a számolást az elképzelhető legnagyobb sebességgel: fénysebességgel végzi. Egy szorzás ideje legyen az az idő, amely alatt a fény átfut egy számológységen: ez $1/3 \cdot 10^{-18}$ másodperc. Akkor 10^{64} darab szorzás

$$t = \frac{1}{3} \cdot 10^{-18} \cdot 10^{64} = \frac{1}{3} \cdot 10^{46} s$$

időt igényel. Ha az eredményt átszámítjuk évekbe, akkor azt kapjuk, hogy ez az idő több mint $\frac{1}{3} \cdot 10^{37}$ év!

Az alkalmazások során (pl. az időjárás-előrejelzésben) jóval nagyobb méretű egyenletrendszerek is előfordulnak. Világos, hogy ezeket a Cramer-szabállyal lehetetlen reális időn belül megoldani. Ezért a gyakorlatban más módszerek terjedtek el. Ezek közül három alapvetővel foglalkozunk: a Gauss-eliminációval, a Gauss–Jordan-eliminációval és a faktorizációs eljárásokkal. Mindezek az ún. direkt módszerek közé tartoznak, ami azt jelenti, hogy pontos számolással a pontos megoldást kapjuk meg. A másik lehetőség valamilyen iterációs módszer alkalmazása: a megoldás közelítését állítjuk elő egy hozzá konvergáló vektorsorozat segítségével.

6.1. Kiküszöbölési (eliminációs) módszerek

A kiküszöbölési eljárások azon az észrevételen alapulnak, hogy egyes speciális egyenletrendszerek könnyen megoldhatók. A legegyszerűbb eset az, amikor az A együtthatómátrix diagonális. Tekintsük például az

$$\begin{aligned} 5x_1 &= 10 \\ 2x_2 &= 4 \\ 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ebben az esetben

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix},$$

és az ismeretlenek az egyenletekből közvetlenül kifejezhetők:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ha az együtthatómátrix az identitásmátrix, akkor a jobb oldalon a megoldás áll. Könnyű dolgunk van háromszögmátrixú egyenletrendszerek esetén is. Az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 4x_2 + 5x_3 &= 17 \\ 9x_3 &= 27 \end{aligned}$$

egyenletrendszer mátrixa felsőháromszög-mátrix. Az utolsó egyenletből kifejezhető az x_3 ismeretlen: $x_3 = 27/9 = 3$. Ezt behelyettesítjük a második egyenletbe, és kifejezzük x_2 -t: $x_2 = 1/2$. Végül x_1 az első egyenletből adódik x_2 és x_3 behelyettesítésével: $x_1 = 7 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$.

Legyen $A\underline{x} = \underline{b}$ négyzetes mátrixú egyenletrendszer, ahol A se nem diagonális, se nem háromszögmátrix. A kiküszöbölési eljárások lényege, hogy a rendszert átalakítjuk háromszögmátrixú vagy diagonálmátrixú rendszerré. Az átalakítás ekvivalens átalakítást jelent, azaz olyat, amely nem változtatja meg az egyenletrendszer megoldását. Így például

1. egyenleteket felcserélhetünk;
2. egyenleteket bármilyen nullától különböző számmal szorozhatunk;

3. bármelyik egyenlethez hozzáadhatjuk egy másik egyenlet tetszőleges számszorosát.

A következőkben két kiküszöbölési eljárást ismertetünk.

6.1.1. Gauss-elimináció

A Gauss-elimináció során az egyenletrendszert az előző részben ismertetett 1., 2. ill. 3. műveletek segítségével felsőháromszög-mátrixú rendszerre transzformáljuk. Ehhez célszerű az együtthatókat és a szabad tagokat táblázatba foglalni, és az átalakításokat ezen a táblázaton nyomon követni, hiszen az ismeretleneket fölösleges minden egyes lépésben kiírunk. Az elemek nullára transzformálása során felülről lefelé és balról jobbra haladunk. Így elkerülhetjük, hogy már lenullázott elem újra feltöltődjön.

Alkalmazzuk ezt a módszert a

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 4 \\ x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 6 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 5 \end{array}$$

egyenletrendszerre! Készítsük el a együtthatók és a szabad tagok táblázatát:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{array} \right].$$

Lépések:

1. Először a bal felső elem alatti számokat transzformáljuk nullára. Ehhez a 2. ill. a 3. egyenletből kivonjuk az első egyenlet $\frac{1}{2}$ -szeresét:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 5/2 & 3/2 & 4 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & 3 \end{array} \right].$$

2. A főátló alatt már csak egy nemnulla elem van: a 3. sor 2. eleme. Ezért a 3. sorból kivonjuk a 2. sor $\frac{3}{5}$ -szörösét:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 5/2 & 3/2 & 4 \\ 0 & 0 & 3/5 & 3/5 \end{array} \right].$$

Tehát a megoldandó egyenletrendszer ekvivalens a

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ & \frac{5}{2}x_2 & +\frac{3}{2}x_3 & = 4 \\ & & \frac{3}{5}x_3 & = \frac{3}{5} \end{array}$$

egyenletrendszerrel. Ebből az ismeretleneket alulról fölfelé kiküszöbölve az

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$$

megoldáshoz jutunk.

Ha egy egyenletrendszernek több megoldása is van, akkor a rendszert megoldani annyit jelent, mint meghatározni az összes megoldását. A következő egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Határozzuk meg az összes megoldását a Gauss-elimináció technikáját alkalmazva!

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +6x_2 & -x_3 & = 6 \\ 3x_1 & +7x_2 & +2x_3 & = 7 \end{array}$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & -1 & 6 \\ 3 & 7 & 2 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{(2.)-(1.) \cdot 2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 7 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{(3.)-(1.) \cdot 3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -7 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{(3.)-(2.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Az utolsó előtti lépésben megjelenő két egyforma sor már mutatja, hogy az egyenletek nem voltak függetlenek egymástól. Ha a harmadik egyenletből kivonjuk a másodikat, egy csupa nulla sort kapunk. Ez a $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$ egyenletnek felel meg, amelynek minden számhármassal eleget tesz. Az eredeti egyenletrendszer tehát ekvivalens egy olyannal, amely csak két egyenletből áll. Ennek végtelen sok megoldása van. Ezeket felírhatjuk pl. a következőképpen: legyen $x_3 = p \in \mathbb{R}$ tetszőleges. A maradék ismeretlenek értéke természetesen már függ ettől a p paramétertől: az x_2 -t a második egyenletből határozhatjuk meg: $x_2 = 1 + \frac{7}{4}p$, végül az első egyenletből meghatározható az első ismeretlen: $x_1 = -\frac{19}{4}p$. Tehát az egyenletrendszer összes megoldását a következőképpen adhatjuk meg:

$$x_1 = -\frac{19}{4}p, \quad x_2 = 1 + \frac{7}{4}p, \quad x_3 = p, \quad p \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges.}$$

Megjegyezzük, hogy a Gauss-elimináció technikája nem csak négyzetes mátrixú egyenletrendszerekre alkalmazható, hanem tetszőleges lineáris egyenletrendszerre. Az átalakítások során arra törekedjünk, hogy az azonos sor-és oszlopindexű elemek alatt nullák legyenek.

6.1.2. Gauss–Jordan-elimináció

Ez a módszer olyan négyzetes mátrixú egyenletrendszerekre alkalmazható, amelyekben az együtthatómátrix determinánsa nem nulla (egyértelmű megoldás van). Ennél az eljárásnál a Gauss-féle kiküszöbölés lépései után a táblázat átalakítását tovább folytatjuk egészen addig, amíg az együtthatómátrix helyén az identitásmátrixot nem kapjuk. Ekkor a szabad tagok helyén leolvasható a megoldás.

Pl. Az előző 1. példában szereplő egyenletrendszert oldjuk meg a Gauss–Jordan-féle eljárással.

Megoldás: A Gauss-elimináció lépései után tovább folytatjuk az egyenletrendszer átalakítását. A lépéseket a következő táblázatok mutatják:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \right] \xrightarrow{(3.) \cdot \frac{5}{3}, (2.) \cdot \frac{2}{5}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{(2.) - (3.) \cdot \frac{3}{5}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(1.) - (3.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{(1.) - (2.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(1.) / 2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Az utolsó résztáblázat jobb oldali oszlopa szerint az összes ismeretlen 1-gyel egyenlő.

6.1.3. Mátrixinvertálás Gauss- és Gauss–Jordan-eliminációval

A Gauss- és a Gauss–Jordan-féle eljárás mátrixinvertálásra is alkalmazható. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olyan négyzetes mátrix, amelyre $\det A \neq 0$ (láttuk, hogy az ilyen mátrixoknak léteznek inverzük). Keressük azt az $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot, amely kielégíti $AX = I$ mátrixegyenletet. Az egyenlet X megoldása nem más, mint a keresett A^{-1} inverz mátrix.

Vezessük be az

$$\underline{x}_i := \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

jelölést a keresett mátrix i -edik oszlopvektorára.. Az A mátrixszal megszorozva az $\underline{x}_i$ oszlopvektort, az $AX = I$ szorzatmátrix i -edik oszlopát kell megkapnunk, vagyis az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ oszlopvektort. (Itt $\underline{e}_i$ jelöli azt az $\mathbb{R}^n$ -beli vektort, amelynek i -edik eleme 1, a többi nulla.) A feladat tehát az n darab

$$A\underline{x}_i = \underline{e}_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

egyenletrendszer megoldása. Mivel ezek együtthatómátrixa közös, ezért a Gauss- és a Gauss–Jordan-elimináció esetén is mind az n egyenletrendszerben ugyanazokat az átalakításokat végezzük el az A mátrix elemein. Ezért célszerű az n db egyenletrendszert egyszerre megoldani, azaz a táblázatba mind az n db jobb oldalt belefoglalni. A Gauss-elimináció alkalmazásakor a bal oldali $n \times n$ -es blokkot felsőháromszög-mátrixúvá alakítjuk, és ezután mind az n jobb oldallal visszahelyettesítünk. A Gauss–Jordan-elimináció esetén a bal oldalt az identitásmátrixszá transzformáljuk, ekkor a megfelelő átalakítások nyomán a jobb oldali blokkban magát az inverz mátrixot kapjuk meg.

Pl. Invertáljuk az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrixot!

Megoldás: 1. Gauss-eliminációval

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 1 & 0 \\ -8 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(2.)+(1.) \cdot 4} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

A jobb oldali első oszlophoz a következő egyenletrendszer tartozik:

$$\begin{aligned} 2x_{11} - 4x_{21} &= 1 \\ -10x_{21} &= 4 \end{aligned}$$

Ebből $x_{21} = -\frac{2}{5}$ és $x_{11} = -\frac{3}{10}$. A második oszlophoz tartozó egyenletrendszer a következő:

$$2x_{12} - 4x_{22} = 0$$

$$-10x_{22} = 1$$

Ebből $x_{22} = -\frac{1}{10}$ és $x_{12} = -\frac{1}{5}$. Tehát a keresett inverz mátrix:

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

2. Gauss–Jordan-eliminációval: a fenti lépések után a táblázatot tovább alakítjuk:

$$\begin{aligned} &\rightarrow^{(2.) / (-10)} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{array} \right] \rightarrow^{(1.) / 2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{array} \right] \\ &\rightarrow^{(1.) + (2.) \cdot 2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Látható, hogy az utolsó lépésben a jobb oldali blokkban az előbb kiszámított inverz mátrixot kaptuk.

Néhány kiegészítés a Gauss- és a Gauss–Jordan-eliminációhoz

1. Mindkét eliminációs módszer műveletigénye sokkal kisebb, mint a Cramer-szabályé: egy n -ismeretlenes egyenletrendszernél a Gauss-elimináció során hozzávetőlegesen $n^3/3$, a Gauss–Jordan-eliminációnál $n^3/2$ darab szorzást (vagy osztást) kell elvégezni.

2. Ha az egyenletrendszer megoldása során kerekítünk, az eliminációt érdemes az ún. **főelem-kiválasztással** végezni. Láthattuk, hogy a szabályos Gauss-eliminációs algoritmus során az aktuális táblázat i -edik oszlopában általános esetben úgy tudjuk nullára transzformálni az a_{ii} alatti elemeket, hogy az i -edik sort először elosztjuk a_{ii} -vel, majd az így kapott sor megfelelő számszorosát kivonjuk vagy hozzáadjuk a lejjebb lévő sorokhoz. Mivel kis számmal való osztásnál nagy lehet a kerekítési hiba hatása, ezért kedvezőtlen, ha az a_{ii} elem kis abszolút értékű. Ennek elkerülésére szolgál a főelem-kiválasztás.

A **részleges főelem-kiválasztás** során megvizsgáljuk, hogy az adott oszlopban a főátló alatt van-e a főátlóbeli elemnél nagyobb abszolút értékű szám, és ha igen, akkor sorcserével a főátlóba hozzuk.

Alább láthatunk egy példát részleges főelem-kiválasztásra. Mielőtt nullára transzformálnánk a 2. oszlopban lévő elemeket a főátló alatt, felcseréljük a 2. és a 3. sort. Ezzel a

főátlóba kerül az oszlop legnagyobb abszolút értékű főátló alatti eleme.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 0 & \mathbf{1} & 5 & 4 & 1 \\ 0 & \underline{\mathbf{500}} & 5 & 10 & -15 \\ 0 & \mathbf{3} & 2 & 5 & -9 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 0 & \underline{\mathbf{500}} & 5 & 10 & -15 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & -9 \end{array} \right]$$

Még jobban csökkenthető a számítási hiba a **teljes főelem-kiválasztással**. Ilyenkor a táblázatnak a főátlóbeli elemből jobbra és lefelé kiinduló legnagyobb négyzetes blokkjában keressük a legnagyobb abszolút értékű elemet (főelem). Ennek főátlóba hozásához esetleg sor- és oszlopcserét is végre kell hajtánunk. Az utóbbinál arra kell vigyázni, hogy megváltozik az oszlopok számozása. (Pl. ha a 4. oszlopot áthozzuk a 2. oszlopba, akkor onnantól kezdve a 2. oszlop az x_4 ismeretlen együtthatóit fogja tartalmazni!)

Alább láthatunk egy példát teljes főelem-kiválasztásra. Megkeressük a legnagyobb abszolút értékű elemet a vastagon szedett blokkban. Ezt úgy hozhatjuk a főátlóba, hogy felcseréljük a 2. és a 3. sort, majd a 2. és a 4. oszlopot. Mostantól a 2. oszlop tartalmazza az x_4 együtthatóit, és a 4. oszlop az x_2 együtthatóit.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & 1 \\ 0 & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \underline{\mathbf{100}} & -15 \\ 0 & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & -9 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 5 & \underline{\mathbf{100}} & -15 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & -9 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 6 & 3 & 7 \\ 0 & \underline{\mathbf{100}} & 5 & 5 & -15 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & -9 \end{array} \right]$$

Az alábbi példán bemutatjuk a főelem-kiválasztás hatását a megoldás pontosságára. Tegyük fel, hogy Gauss-eliminációval szeretnénk megoldani a

$$\begin{aligned} 0,00031x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= 7 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. (Eláruljuk, hogy ennek pontos megoldása (kerekítve) $x_1 = 4,001$, $x_2 = 2,999$.) Alkalmazzuk a Gauss-eliminációt először főelem-kiválasztása nélkül, és mindig kerekítsünk négy értékes jegyre:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0,00031 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{(2.)-(1.) \cdot \frac{1}{0,00031}} \left[\begin{array}{cc|c} 0,00031 & 1 & 3 \\ 0 & -3225 & -9670 \end{array} \right]$$

Ezzel a

$$\begin{aligned} 0,00031x_1 + x_2 &= 3 \\ 3225x_2 &= 9670 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutottunk (a második egyenletet megszoroztuk (-1) -gyel). Ennek megoldása négy értékes jegyre kerekítve: $x_1 = 6,452$, $x_2 = 2,998$. Vegyük észre, hogy az első ismeretlen értékét nagyon nagy hibával kaptuk meg!

Ha főelem-kiválasztással számolunk, akkor a

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0,00031 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

táblázatból indulunk ki. Ekkor a megoldás kerekítve $x_1 = 4,002$, $x_2 = 2,998$, azaz most már x_1 -et is megfelelő pontossággal kaptuk meg. És ehhez csak fel kellett cserélnünk a két sort.

Pontos számolásnál a főelem-kiválasztásnak természetesen nincs jelentősége.

6.1.4. Felbontási (faktorizációs) eljárások

Ezeket a módszereket szintén reguláris, négyzetes mátrixú lineáris egyenletrendszerek megoldására használhatjuk. Faktorizációról akkor beszélünk, ha egy mátrixot két mátrix szorzatára bontunk fel. Tegyük fel, hogy az egyenletrendszer $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ együtthatómátrixa felírható

$$A = B \cdot C, \quad B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

alakban. Ekkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer másképpen $(B \cdot C)\underline{x} = \underline{b}$, azaz $B(C\underline{x}) = \underline{b}$ alakú. Jelölje a $C\underline{x}$ szorzatot $\underline{y}$. Így az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldása ekvivalens a

$$B\underline{y} = \underline{b}$$

és a

$$C\underline{x} = \underline{y}$$

egyenletrendszerek egymás utáni megoldásával.

Nyilvánvalóan ennek csak akkor van értelme, ha a két rendszert külön-külön könnyebb megoldani, mint az eredeti egyenletrendszert, azaz ha B és C „jó struktúrájú” mátrixok. Ez a helyzet például, ha háromszögmátrixokról van szó. Különösen akkor előnyös faktorizációs módszert alkalmazni, ha ugyanazon együtthatómátrixszal, de különböző jobb oldalakkal is meg akarjuk oldani az egyenletrendszert. Az eljárás legmunkaigényesebb része ugyanis a felbontás (B és C kiszámítása), amit ha egyszer már kiszámítottunk és elraktároztunk, akkor bármikor felhasználhatjuk. (A B és C mátrix ismeretében a fenti két egyenletrendszer már könnyen megoldható.)

A következőkben két konkrét faktorizációs módszert ismertetünk.

1. LU-felbontás. Ennek a felbontási módszernek az a lényege, hogy az A mátrixot $L \cdot U$ alakban írjuk fel, ahol L a főátlóban egyeseket tartalmazó alsóháromszög-mátrix, U pedig felsőháromszög-mátrix (a főátlóban nem feltétlenül egyesekkel). Ekkor a megoldandó egyenletrendszerek:

$$L\underline{y} = \underline{b}$$

és

$$U\underline{x} = \underline{y}.$$

Az L és U meghatározásához jelölje a két mátrix kiszámítandó elemeit l_{ij} ill. u_{ij} . Annak kell teljesülnie, hogy a mátrixszorzást elvégezve az A mátrixot kapjuk, így

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

A jobb oldalon elvégezzük a szorzást, és az elemeket egyenlővé tesszük az A mátrix megfelelő elemeivel.

Példa. Oldjuk meg LU-felbontással a

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = 6 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 5 \end{array}$$

egyenletrendszert.

Megoldás: Először meghatározzuk az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

együtthatómátrix LU-felbontását. Ehhez a

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

egyenlőségnek kell fennállnia. A szorzatmátrix első oszlopát az A első oszlopával összehasonlítva az

$$u_{11} = 2,$$

$$l_{21}u_{11} = 1, \quad \text{azaz} \quad l_{21} = \frac{1}{2},$$

$$l_{31}u_{11} = 1, \quad \text{vagyis} \quad l_{31} = \frac{1}{2}$$

összefüggések adódnak. A második oszlopaik összehasonlításából

$$u_{12} = 1,$$

$$l_{21}u_{12} + u_{22} = 3, \quad \text{azaz} \quad u_{22} = 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2},$$

$$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 2, \quad \text{vagyis} \quad l_{32} = \frac{2}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 1\right) = \frac{3}{5},$$

és végül a harmadik oszlopaik összehasonlításából azonnal adódik, hogy

$$u_{13} = 1,$$

$$l_{21}u_{13} + u_{23} = 2, \quad \text{amiből} \quad u_{23} = \frac{3}{2},$$

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 2, \quad \text{vagyis} \quad u_{33} = \frac{3}{5}.$$

A keresett mátrixok tehát

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Ezért az $\underline{L}\underline{y} = \underline{b}$ egyenletrendszer a következő:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} y_1 & & & & & & & & = & 4 \\ \frac{1}{2}y_1 & + & y_2 & & & & & & = & 6 \\ \frac{1}{2}y_1 & + & \frac{3}{5}y_2 & + & y_3 & & & & = & 5 \end{array}$$

Az első, a második és a harmadik egyenletből

$$y_1 = 4, \quad y_2 = 4, \quad y_3 = \frac{3}{5}.$$

Végül az $U\underline{x} = \underline{y}$, azaz a

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ & +\frac{5}{2}x_2 & +\frac{3}{2}x_3 & = 4 \\ & & +\frac{3}{5}x_3 & = \frac{3}{5} \end{array}$$

egyenletrendszer megoldása az utolsó egyenletből kiindulva:

$$x_3 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 1.$$

Az LU-felbontás nem mindig létezik, lásd például a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rrcr} & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ x_1 & +2x_2 & x_3 & = 5 \end{array}$$

(Próbáljuk az együtthatómátrixot felírni LU alakban. Miért nem sikerül?) Ugyanakkor ha teljesül az elején feltett $\det A \neq 0$ feltétel, akkor az egyenletrendszer sorcserével mindig átalakítható úgy, hogy létezzen LU-felbontása. (A fenti példában ehhez elég felcserélni az első és a második egyenletet.)

2. Cholesky-felbontás. Ez a módszer akkor használható, ha A szimmetrikus, pozitív definit mátrix. (A pozitív definitésg azt jelenti, hogy az $(A\underline{x}) \cdot \underline{x}$ skaláris szorzat semmilyen $\underline{x}$ vektorra nem negatív, és csak akkor nulla, ha $\underline{x} = \underline{0}$.) Megmutatható, hogy egy szimmetrikus mátrix pozitív definit, ha az összes bal felső sarokaldeterminánsa pozitív. Ilyenkor A felírható $L \cdot L^T$ alakban, ahol L alsóháromszög-mátrix. Ekkor a megoldandó egyenletrendszerek:

$$L\underline{y} = \underline{b}$$

és

$$L^T \underline{x} = \underline{y}.$$

Pl. Adjuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrix Cholesky-felbontását! Oldjuk meg az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszert, ahol $\underline{b} = (1, 1, 1)^T$.

Megoldás: A

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

mátrixegyenlőségéből:

$$l_{11}^2 = 9 \rightarrow l_{11} = 3 \quad (-3 \text{ is választható})$$

$$l_{21}l_{11} = 6 \Rightarrow l_{21} = 2, \quad l_{31}l_{11} = 3 \Rightarrow l_{31} = 1$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 5 \Rightarrow l_{22}^2 = 1 \Rightarrow l_{22} = 1 \text{ (vagy } -1)$$

$$l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} = 3 \Rightarrow l_{32} = 1$$

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 6 \Rightarrow l_{33}^2 = 4 \Rightarrow l_{33} = 2 \text{ (vagy } -2)$$

Tehát

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad L^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. lépés: Megoldjuk az $L\underline{y} = \underline{b}$ egyenletrendszert:

$$\left. \begin{array}{rcl} 3y_1 & & = 1 \\ 2y_1 + y_2 & & = 1 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 & = & 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{3}, \quad y_2 = \frac{1}{3}, \quad y_3 = \frac{1}{6}$$

2. lépés: Megoldjuk az $L^T\underline{x} = \underline{y}$ egyenletrendszert:

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & \frac{1}{3} \\ x_2 + x_3 & = & \frac{1}{3} \\ 2x_3 & = & \frac{1}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{12}, \quad x_2 = \frac{1}{4}, \quad x_1 = -\frac{1}{12}$$