

1. Gyakorló feladatsor

Vektorterek

1. Az $\mathbb{R}^2$ vektortérben alteret alkotnak-e azok a számpárok, amelyek
 - a.) első eleme 0;
 - b.) második eleme 0;
 - c.) második eleme 3?
2. Legyen W azon számnégyesek halmaza, amelyek első és második elemének összege egyenlő a harmadik és a negyedik elem különbségével. W altér-e $\mathbb{R}^4$ -ben?
3. Legyen V azon P_2 -beli függvények (legfeljebb másodfokú polinomok) halmaza, amelyekre
 - a.) $f(x) \geq 0$ minden $x \in [0, 1]$ pontban;
 - b.) $f(0) = 0$ és $f(1) = 0$;
 - c.) $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$;
 - d.) $f(x) = f(1 - x)$ minden $x \in [0, 1]$ pontban;
 - e.) $f(x) = f(1 - x) + 1$ minden $x \in [0, 1]$ pontban.Mely esetekben lesz V altere P_2 -nek?

Megoldások:

1. a, b: igen (pl. az a. esetben $(0, x) + (0, y) = (0, x + y)$ és $\lambda \cdot (0, x) = (0, \lambda x)$ tetszőleges $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén a halmaz eleme, hiszen szintén olyan számpár lesz, amelynek első eleme nulla),
c: nem (nem zárt pl. az összeadásra, mert $(x, 3) + (y, 3) = (x + y, 6)$, azaz két számpár összegének második eleme nem 3 lesz, hanem 6, így az összeg nincs benne a halmazban).
2. Írjuk fel két W -beli elem összegét és skalárszorosát, és vizsgáljuk meg, hogy az eredményül kapott számnégyes mindig benne van-e W -ben, azaz igaz-e az eredményre is, hogy az első két elem összege egyenlő a harmadik és a negyedik elem különbségével.

$$a = (a_1, a_2, a_3, a_4), \quad b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in W \Leftrightarrow a_1 + a_2 = a_3 - a_4, \quad b_1 + b_2 = b_3 - b_4$$

$\mathbb{R}^4$ -ben elemenként adunk össze két vektort:

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$$

Igaz-e az összegre, hogy

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = (a_3 + b_3) - (a_4 + b_4)?$$

Igen, hiszen $a_1 + a_2 = a_3 - a_4$ és $b_1 + b_2 = b_3 - b_4$, ezért $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = (a_3 - a_4) + (b_3 - b_4) = (a_3 + b_3) - (a_4 + b_4)$.

A skalárral való szorzást is elemenként végezzük, tehát

$$\lambda \cdot (a_1, a_2, a_3, a_4) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda a_4)$$

Igaz-e, hogy ez a vektor is mindig eleme W -nek, azaz

$$\lambda a_1 + \lambda a_2 = \lambda a_3 - \lambda a_4?$$

Igen, hiszen

$$\lambda a_1 + \lambda a_2 = \lambda(a_1 + a_2) = \lambda(a_3 - a_4) = \lambda a_3 - \lambda a_4.$$

3. a, c, e: nem, b, d: igen.

Részletesebben:

a.) Ha pl. az $f(x) = x^2$ függvényt (-1) -gyel szorozzuk, akkor $(-1)x^2 = -x^2$ a $[0, 1]$ -en felvesz negatív értékeket is, tehát az ilyen tulajdonságú polinomok halmaza nem zárt a skalárral való szorzásra.

b.) Ha $f, g \in P_2$, és $f(0) = 0, g(0) = 0, f(1) = 0, g(1) = 0$, akkor $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$ és $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$. Továbbá $(\lambda \cdot f)(0) = \lambda \cdot f(0) = \lambda \cdot 0 = 0$ és $(\lambda \cdot f)(1) = \lambda \cdot f(1) = \lambda \cdot 0 = 0$ azaz az összegfüggvény és a skalárszoros függvény is ugyanilyen tulajdonságú, és természetesen szintén legfeljebb másodfokú polinom.

c.) Ha $f, g \in P_2$, és $f(0) = 0, g(0) = 0, f(1) = 1, g(1) = 1$, akkor $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$ és $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 1 + 1 = 2$, azaz az összegfüggvényre már nem igaz, hogy 1-ben 1-et vesz fel, ezért nem vektortér.

d.) Ha $f, g \in P_2$, és $f(x) = f(1 - x), g(x) = g(1 - x)$, akkor $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(1 - x) + g(1 - x) = (f + g)(1 - x)$; továbbá $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot f(1 - x) = (\lambda \cdot f)(1 - x)$, azaz az összegfüggvény és a skalárszoros függvény is ugyanilyen tulajdonságú, és természetesen szintén legfeljebb másodfokú polinom.

d.) Ha $f, g \in P_2$, és $f(x) = f(1 - x) + 1$ és $g(x) = g(1 - x) + 1$, akkor $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(1 - x) + 1 + g(1 - x) + 1 = (f + g)(1 - x) + 2$, tehát az összegfüggvény nincs a halmazban.