

2. Gyakorló feladatsor

Fontos fogalmak vektorterekben

- Adjunk meg bázist a következő vektorterekben, és számítsuk ki a dimenziót.
 - $X := \{x \in \mathbb{R}^4 : x = (a, b, a, b) \text{ alakú}\};$
 - $X := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\};$
 - $X := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2\}$

- Bázist alkotnak-e a legfeljebb másodfokú polinomok vektorterében a következő elemek:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 + 3, \quad h(x) = x?$$

Ha igen, mik a koordinátái ebben a bázisban a $p(x) = 5x^2 + x + 2$ polinomnak?

- Mi a lineáris burka az f és g függvénynek (azaz mi a $\text{span}[f, g]$ halmaz) az 1. feladatban?
- Az f, g, h függvények bázist alkotnak, de közülük bármelyik kettő még nem alkot bázist. Mondjunk olyan legfeljebb másodfokú polinomot, amelyet nem lehet g és h lineáris kombinációjaként előállítani, azaz nincs benne a $\text{span}[g, h]$ lineáris burokban.

Megoldások:

- $B := \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}, \dim X = 2.$
 - $B := \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}, \dim X = 2.$ (Segítség: az $(x_1, x_2, -x_1 - x_2)$ alakú vektorok tartoznak ebbe a halmazba.)
 - $B := \{(1, 1, 0, \dots, 0), (0, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)\}, \dim X = n - 1.$
- Belátjuk, hogy ezek a függvények lineárisan függetlenek, vagyis az

$$\alpha x^2 + \beta(x^2 + 3) + \gamma x = 0$$

egyenlőség minden $x \in \mathbb{R}$ pontban csak akkor áll fenn, ha $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Az $x := 0$ pontban csak akkor lehet egyenlőség, ha

$$0 + 3\beta + 0 = 0,$$

vagyis a β számnak muszáj nullának lennie. Az $x := 1$ pontban is fenn kell állnia az egyenlőségnek, ez csak úgy lehet, ha

$$\alpha + 4\beta + \gamma = 0,$$

amiből, felhasználva, hogy $\beta = 0$, az

$$\alpha + \gamma = 0$$

feltétel adódik. Az $x := -1$ pontban is fenn kell állnia az egyenlőségnek, ehhez pedig az kell, hogy

$$\alpha + 4\beta - \gamma = 0,$$

azaz

$$\alpha - \gamma = 0$$

legyen. Az utóbbi két feltételnek csak $\alpha = 0$ és $\gamma = 0$ tesz eleget, tehát valóban az összes együtthatónak nullának kell lennie. Mivel P_2 háromdimenziós vektortér, így három lineárisan független elem bázist alkot benne. Tehát a megadott függvényhalmaz bázis. A $p(x) = 5x^2 + x + 2$ koordinátáit a következőképpen kaphatjuk meg: keressük azon a, b, c számokat, amelyekkel

$$5x^2 + x + 2 = ax^2 + b(x^2 + 3) + cx$$

minden $x \in \mathbb{R}$ számra. A jobb oldalt alakítsuk át úgy, hogy ott az x^2 , x és 1 függvények lineáris kombinációja álljon:

$$5x^2 + x + 2 = (a + b)x^2 + cx + 3b.$$

Ezek a függvények bázist alkotnak, így a két oldal között csak akkor lesz egyenlőség minden x -re, ha az x^2 , x és 1 együtthatója megegyezik a két oldalon. Ebből az

$$a + b = 5, \quad c = 1, \quad 3b = 2$$

egyenletrendszerhez jutunk, amelynek megoldása, azaz a keresett koordináták: $(\frac{13}{3}, \frac{2}{3}, 1)$.

3. $\text{span}[f, g]$ -t az összes olyan polinom alkotja, amely $u(x) = \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 (x^2 + 3)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ alakú. Mivel $\alpha_1 x^2 + \alpha_2 (x^2 + 3) = (\alpha_1 + \alpha_2)x^2 + 3\alpha_2$, és a konstansok tetszőlegesek lehetnek, ez az $u(x) = ax^2 + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ alakú függvényeket jelenti.
4. $\text{span}[g, h]$ az $\alpha(x^2 + 3) + \beta x = \alpha x^2 + \beta x + 3\alpha$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alakú függvényekből áll, tehát csak olyan függvények vannak benne, amelyekben a konstans tag az x^2 együtthatójának a 3-szorosa, tehát nincs benne pl. a $v(x) = x^2$ függvény.