

3. Gyakorló feladatsor

Lineáris leképezések

1. Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris leképezésnek a mátrixát, amely az $(1, 1)$ vektorhoz az $(5, 0)$ vektort, az $(1, 2)$ vektorhoz pedig a $(8, 1)$ vektort rendeli.
2. Lineáris-e az a függvény, amely egy $[a, b]$ zárt intervallumon értelmezett folytonos függvényhez $(a, b \in \mathbb{R}, a < b$ tetszőleges) hozzárendeli az a pontban felvett függvényértékét?
3. Lineáris-e az az $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezés, amely egy síkvektor Descartes-koordinátáiból álló számpárhoz hozzárendeli a polárkoordinátáiból álló számpárt?
4. Adjuk meg annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, amely egy síkvektor $B_1 = \{\underline{i} + \underline{j}, \underline{i} - \underline{j}\}$ bázisbeli koordinátavektorához hozzárendeli a $B_2 = \{2\underline{i}, 3\underline{j}\}$ bázisbeli koordinátavektorát.

Megoldások:

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

2. $f : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(u) = u(a)$ lineáris, mert

1. $f(u + v) = (u + v)(a) = u(a) + v(a) = f(u) + f(v) \quad \forall u, v \in C[a, b],$ és

2. $f(\lambda u) = (\lambda u)(a) = \lambda \cdot u(a) = \lambda \cdot f(u) \quad \forall u \in C[a, b], \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

3. Az $f : (x, y) \rightarrow (r, \phi)$ leképezés nem lineáris, hiszen $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ és $\phi = \arctg \frac{y}{x}$, azaz sem r , sem ϕ nem $a_1x + a_2y, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ alakú.

4. Jelölje egy tetszőleges síkvektor B_1 -beli koordinátavektorát (x_1, x_2) , a B_2 -belit pedig (y_1, y_2) . Hogyan függ y_1 és y_2 (x_1, x_2) -től? (Azt a mátrixot keressük, amellyel az (x_1, x_2) vektort megszorozva az (y_1, y_2) vektort kapjuk.) Mivel ezek ugyanannak a vektornak a két bázisbeli koordinátái, ezért

$$x_1(\underline{i} + \underline{j}) + x_2(\underline{i} - \underline{j}) = y_1 2\underline{i} + y_2 3\underline{j}.$$

Ez az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha a két oldalon megegyezik az $\underline{i}$ és a $\underline{j}$ együtthatója is. Ebből

$$x_1 + x_2 = 2y_1, \quad x_1 - x_2 = 3y_2.$$

Vagyis

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_2 = \frac{x_1 - x_2}{3}.$$

Tehát a mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$