

5. Gyakorló feladatsor

Lineáris leképezések mátrixa, speciális mátrixok, mátrixok sajátértékei, sajátvektorai

- Írjuk fel a ϕ szögű elforgatás mátrixát, ha
 - $B_1 = \{\underline{i}, \underline{j}\}$, $B_2 = \{\underline{i} + \underline{j}, 2\underline{j}\}$;
 - $B_1 = \{2\underline{i}, 2\underline{j}\}$, $B_2 = \{\underline{i} + \underline{j}, \underline{j}\}$!
- Mi lesz a 90° -os elforgatás mátrixa, ha $B_1 = \{\underline{i}, \underline{j}\}$, $B_2 = \{\underline{j}, -\underline{i}\}$?
- Mi a mátrixa az egymás utáni 60° -os elforgatásnak és y tengelyre való tükrözésnek, ha B_1 és B_2 is a descartesi bázis?
 - Mi a mátrix, ha fordított sorrendben végezzük el a tükrözést és a forgatást?
- Melyik jelző illik rá az

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixra az következők közül: ortogonális, szimmetrikus, normális, permutációs, nilpotens?

- Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

- Számítsuk ki a

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit!

- Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reguláris mátrix, és tegyük fel, hogy $\lambda \in \sigma(A)$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\frac{1}{\lambda}$ sajátértéke az A^{-1} inverz mátrixnak.
- Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, és tegyük fel, hogy az elemek összege minden sorban 1. Bizonyítsuk be, hogy ekkor A -nak sajátértéke az 1.
- Adjuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix spektrálfelbontását, ha létezik.

b.) Ellenőrizzük a kapott spektrálfelbontáson, hogy a fenti A mátrix négyzete egyenlő az $S \cdot \text{diag} [\lambda_1^2, \lambda_2^2] \cdot S^{-1}$ kifejezéssel.

Megoldások:

1.

$$a.) \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \frac{\sin \phi - \cos \phi}{2} & \frac{\cos \phi + \sin \phi}{2} \end{bmatrix} \quad b.) \begin{bmatrix} 2 \cos \phi & -2 \sin \phi \\ 2(\sin \phi - \cos \phi) & 2(\cos \phi + \sin \phi) \end{bmatrix}$$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(Nem meglepő, hogy a helybenhagyás mátrixát kaptuk, hiszen a vektorokkal együtt a báziselemeket is 90° -kal elforgattuk. Így a vektoroknak nem változnak meg a koordinátáik.)

3. a.)

$$A_t \cdot A_{60^\circ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b.)

$$A_{60^\circ} \cdot A_t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A két különböző sorrendben elvégzett mátrixszorzás eltérő eredményt ad, azaz nem mindegy, hogy milyen sorrendben végezzük el a tükrözést és a 60° -os forgatást.

4. Ortogonális, szimmetrikus, normális. Mivel minden páros hatványa az identitásmátrix, és minden páratlan hatványa önmaga, így nem nilpotens.

5. Sajátértékek: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$. A 4-hez tartozó sajátvektorok:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 2p \\ p \end{bmatrix}, \quad p \in \mathbb{R}, \quad p \neq 0 \text{ tetszőleges.}$$

Az 1-hez tartozó sajátvektorok:

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} q \\ -q \end{bmatrix}, \quad q \in \mathbb{R}, \quad q \neq 0 \text{ tetszőleges.}$$

6. Komplex sajátértékeket kapunk: $\lambda_1 = 2 + i\sqrt{5}$, $\lambda_2 = 2 - i\sqrt{5}$.

7. Mivel λ sajátértéke A -nak, ezért létezik olyan $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektor, amelyre $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$. Szorozzuk meg ezt az egyenletet balról az A^{-1} inverz mátrixszal. (Ez létezik, mert a mátrixnak nemnulla a determinánsa.)

$$A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}\lambda\underline{x}.$$

Mivel $A^{-1}A = I$, ezért ez az

$$\underline{x} = \lambda A^{-1}\underline{x}$$

egyenletet jelenti. Mivel λ egy reguláris mátrix sajátértéke, ezért $\lambda \neq 0$. Így az egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk λ -val:

$$\frac{1}{\lambda}\underline{x} = A^{-1}\underline{x}$$

Vagyis $\frac{1}{\lambda}$ sajátértéke A^{-1} -nek.

8. Legyen

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Ekkor $A\underline{x} = 1 \cdot \underline{x}$, azaz $1 \in \sigma(A)$.

9. a.) Számítsuk ki A sajátértékeit:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(4 - \lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1$$

Van két különböző sajátérték $\Rightarrow$ létezik spektrálfelbontás. Mindkét sajátértékhez keressünk egy-egy sajátvektort!

1. $\lambda_1 = 5$ -höz: az

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

vagyis a

$$\begin{aligned} -3u_1 + u_2 &= 0 \\ (3u_1 - u_2 &= 0) \end{aligned}$$

egyenletrendszer egy megoldását keressük. Minden olyan számpár megoldás, amelyre

$u_2 = 3u_1$, azaz pl. $\underline{u} := (1, 3)$.

2. $\lambda_2 = 1$ -hez: a megoldandó egyenletrendszer a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek megoldása minden olyan számpár, amelyre $v_1 = -v_2$. Legyen pl. $\underline{v} = (1, -1)$.

Ezzel a keresett S mátrix:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki az inverzét:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Ezzel A spektrálfelbontása:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

b.)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$