

6. Gyakorló feladatsor

Mátrixfüggvények, mátrixnormák, koordináta-transzformációk

1. Ismeretes, hogy a szinusz- és koszinuszfüggvény a következő hatványsorok összegfüggvénye:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Írjuk fel az alábbi mátrixok szinuszt és koszinuszt!

$$\text{a.) } A = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \quad \text{b.) } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{c.) } C = \begin{bmatrix} \frac{3\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \\ \pi & 0 \end{bmatrix}$$

2. a.) Írjuk fel a koordináta-transzformáció mátrixát, ha a $B_1 = \{2\underline{i}, -\underline{j}\}$ bázisról a $B_2 = \{\underline{i} - \underline{j}, \underline{i} + \underline{j}\}$ bázisra szeretnénk áttérni. Hossztartó-e a transzformáció?
b.) Mik a $2\underline{i} + 3\underline{j}$ vektor koordinátái a B_1 és a B_2 bázisban? Az utóbbihoz használjuk fel az a.) részben kiszámított mátrixot.

Megoldások:

1. a.) Az A mátrix diagonálmátrix, ezért a diagonálisban lévő számokat kell csak behelyettesíteni a szinuszfüggvénybe:

$$\sin A = \begin{bmatrix} \sin \pi & 0 \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- b.) A B mátrix nilpotens, a harmadik hatványa már a nullmátrix, ezért

$$\sin B = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

és

$$\cos B = I - \frac{B^2}{2!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- c.) A C mátrix diagonalizálható, ugyanis létezik spektrálfelbontása. Sajátértékei:

$\pi, \pi/2$, és egy-egy sajátvektora $(1, 1)$, $(1, 2)$, amiből (a tavaly tanult módon)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A mátrix szinuszának és koszinuszának kiszámításához a spektrálfelbontásban közepén álló diagonálmátrixnak vesszük a szinuszt és koszinuszt, és elvégezzük a mátrixszorzásokat:

$$\sin C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \pi & 0 \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\cos C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \pi & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. a.) A keresett mátrix 1. oszlopába írjuk a B_1 első elemének, azaz $2\underline{i}$ -nek a B_2 bázisbeli koordinátáit: $(1, 1)$. A 2. oszlopba írjuk a B_1 második elemének, azaz $-\underline{j}$ -nek a B_2 bázisbeli koordinátáit: $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Így a koordináta-transzformáció mátrixa:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ez a mátrix nem ortogonális, így a transzformáció nem hossztartó.

- b.) A $2\underline{i} + 3\underline{j}$ vektor $1 \cdot 2\underline{i} + (-3)(-\underline{j})$ alakban írható fel, így a B_1 -beli koordinátavektora $(1, -3)$. Szorozzuk meg az $(1, -3)$ vektort a K mátrisszal, így kapjuk a B_2 -beli koordinátavektort: $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$.