

7. Gyakorló feladatsor

Euklideszi terek

1. Mutassuk meg, hogy a következő elemek páronként merőlegesek a $(C[-\pi, \pi], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi térben, ahol $\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot g$.

$$f_1(t) = 1, \quad f_2(t) = \sin t, \quad f_3(t) = \cos t$$

2. Lássuk be, hogy ha egy $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi térben az $x \in X$ vektor merőleges az $y_1, y_2, \dots, y_k \in X$ vektorokra, akkor x merőleges az $y_1, y_2, \dots, y_k \in X$ vektorok tetszőleges lineáris kombinációjára is.

Megoldások:

1. Képezzük a megadott függvények skaláris szorzatát páronként, és mutassuk meg, hogy mindegyik nullával egyenlő:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cos t dt = [\sin t]_{-\pi}^{\pi} = \sin \pi - \sin(-\pi) = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin t dt = [-\cos t]_{-\pi}^{\pi} = -\cos \pi + \cos(-\pi) = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin 2t dt = -\frac{1}{4}(\cos 2\pi - \cos(-2\pi)) = 0.$$

2. Bizonyítás: Képezzük az x vektor skaláris szorzatát az $y_1, y_2, \dots, y_k \in X$ vektorok tetszőleges lineáris kombinációjával, és alkalmazzuk a skaláris szorzás műveleti tulajdonságait:

$$\langle x, c_1 y_1 + \dots + c_k y_k \rangle = \langle x, c_1 y_1 \rangle + \dots + \langle x, c_k y_k \rangle = c_1 \langle x, y_1 \rangle + \dots + c_k \langle x, y_k \rangle = 0.$$