

9. Gyakorló feladatsor

Többdimenziós integrál, felületi integrál

1. Számítsuk ki a következő kétdimenziós Riemann-integrált:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(\int_0^{\pi} (\sin x + \cos y) dx \right) dy$$

2. Számítsuk ki a $v(\underline{r}) = \underline{r}$ vektormező ($\underline{r}$ az (x, y, z) vektort jelöli) felületi integrálját a 0 középpontú egységsugarú gömbfelületre.
3. Számítsuk ki az $f(x, y, z) = (zx, zy, x + z)$ vektormező felületi integrálját annak a hengernek a palástjára, amelynek alaplappja az origó középpontú, 10 egység sugarú kör, és magassága 2 egység.

Megoldások:

1. 2π
2. A felület paraméterezése

$$\Phi(\phi, \vartheta) = (\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta), \quad \phi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi].$$

Kiszámítandó az

$$\int_{\Phi} v = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \langle v(\Phi(\phi, \vartheta)), \partial_{\vartheta} \Phi \times \partial_{\phi} \Phi \rangle d\vartheta \right) d\phi$$

integrál. Itt

$$\partial_{\vartheta} \Phi = (\cos \vartheta \cos \phi, \cos \vartheta \sin \phi, -\sin \vartheta)$$

és

$$\partial_{\phi} \Phi = (-\sin \vartheta \sin \phi, \sin \vartheta \cos \phi, 0),$$

amelyek vektoriális szorzata akkor mutat kifelé a felületből, ha $\partial_{\vartheta} \Phi$ áll elől. Számítsuk ki az integrandust:

$$\begin{aligned} \langle v(\Phi(\phi, \vartheta)), \partial_{\vartheta} \Phi \times \partial_{\phi} \Phi \rangle &= \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \phi & \sin \vartheta \sin \phi & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \phi & \cos \vartheta \sin \phi & -\sin \vartheta \\ -\sin \vartheta \sin \phi & \sin \vartheta \cos \phi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \sin^3 \vartheta \sin^2 \phi + \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \cos^2 \phi + \sin^3 \vartheta \cos^2 \phi + \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \sin^2 \phi = \end{aligned}$$

$$= \sin^3 \vartheta + \cos^2 \vartheta \sin \vartheta = \sin \vartheta (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) = \sin \vartheta.$$

Tehát

$$\int_{\Phi} v = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} 2 \, \mathrm{d}\phi = 4\pi.$$

3. 400π