

VEKTORSZÁMÍTÁS ZÁRTHELYI az 1. anyagrészből - A csoport

Megoldások

Elméleti rész

1. -
2. -
3. Igaz: a., c., d.

Gyakorlati rész

1. Nem alkotnak vektorteret, ugyanis ezen számhármassok halmaza nem zárt pl. az összeadásra:

$$(5, y_1, z_1) + (5, y_2, z_2) = (10, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

azaz két elem összege olyan elem lesz, amelynek az első koordinátája nem 5, hanem 10, tehát nincs benne a halmazban.

2. Vizsgáljuk meg, hogy a leképezés mátrixa invertálható-e.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ha $\det A \neq 0$, akkor a mátrix invertálható, ha $\det A = 0$, akkor nem invertálható. Most $\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow$ invertálható, így az f leképezés is invertálható.

3. a.) Tükrözzük B_1 elemeit az y -tengelyre! A $-\underline{i}$ vektor tükörképe $f(-\underline{i}) = \underline{i}$, a $-\underline{j}$ tükörképe pedig $f(-\underline{j}) = -\underline{j}$. Írjuk fel ezen képvektorok B_2 bázisbeli koordinátáit.

1.

$$\underline{i} = \alpha_1 \underline{i} + \alpha_2 (\underline{i} + \underline{j}), \quad \alpha_1, \alpha_2 = ?$$

Ez az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $1 = \alpha_1 + \alpha_2$ és $\alpha_2 = 0$, azaz $\alpha_1 = 1$ és $\alpha_2 = 0$. Így a keresett mátrix 1. oszlopába írjuk az $(1, 0)$ vektort.

2.

$$-\underline{j} = \beta_1 \underline{i} + \beta_2 (\underline{i} + \underline{j}), \quad \beta_1, \beta_2 = ?$$

Itt $\beta_1 + \beta_2 = 0$, $\beta_2 = -1$, amiből $\beta_1 = 1, \beta_2 = -1$. Tehát a mátrix 2. oszlopa az $(1, -1)$ vektor lesz. Tehát

$$A_{B_1, B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Nem ortogonális, mert pl. az első sorvektora nem egy, hanem $\sqrt{2}$ hosszúságú. Normális, hiszen szimmetrikus. Nem nilpotens, mert minden hatványa csupa pozitív elemű mátrix. Pozitív definit, mert szimmetrikus és mindkét bal felső sarokaldeterminánsa pozitív.