

VEKTORSZÁMÍTÁS ZÁRTHELYI a 2. anyagrészből - A csoport
2009. december 8.

Elméleti rész

1. Mit nevezünk euklideszi térnek? Adj rá két példát! (1 pont)
2. Fejtsd ki részletesebben, hogy hogyan értelmezzük egy skalármező felszíni integrálját! (2 pont)
3. Mely állítások igazak az alábbiak közül? (1 pont; a helyes döntés 0,2, a hibás döntés -0,1 pontot ér.)
 - a.) Ha egy $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrix diagonalizálható, akkor van 2 db lineárisan független sajátvektora.
 - b.) Az $\mathbb{R}^2$ -beli második vektornorma az oszlopnormát indukálja.
 - c.) Minden indukált mátrixnormában igaz, hogy tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixokra $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.
 - d.) Minden vektortérben értelmezve van a vektorok egymással bezárt szöge.
 - e.) Egy vektormező vonalintegrálja vektor.

Gyakorlati rész

1. Számítsd ki az

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix exponenciálisát. (Emlékeztetőül az exponenciális függvény hatványsora: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.) (1 pont)

2. Paraméterezd azt a téglalapot, amelynek csúcsai $(-1, 0, -1)$, $(-1, 0, 2)$, $(1, 0, -1)$ és $(1, 0, 2)$. (1 pont)
3. Határozd meg az $f(x, y, z) = (xy^2, x^2y, xz)$ vektormező vonalintegrálját az $r(u) = (u, u^2, u^3)$, $u \in [0, 1]$ térgörbére. (1 pont)
4. Számítsd ki az $f(x, y, z) = (zx, zy, x + z)$ vektormező felületi integrálját annak a hengernek a palástjára, amelynek alaplappja az xy -síkban fekvő, origó középpontú, 10 egység sugarú kör, magassága pedig 2 egység. (2 pont)

A gyak. rész 1., 2. és 4. feladat megoldásai:

1. A nilpotens (A^2 már a nullmátrix), így az exponenciális sorba való behelyettesítése csak két tagból áll: $\exp(A) = I + A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Paraméternek érdemes az x és z koordinátát választani (mivel a téglalap az xz síkban fekszik): $\Phi(x, z) = (x, 0, z)$, $x \in [-1, 1]$, $z \in [-1, 2]$.

3. -

4. A hengeralást szokásos paraméterezése: $\Phi(u, v) = (10 \cos u, 10 \sin u, v)$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 2]$.

$$f(\Phi(u, v)) = f(10 \cos u, 10 \sin u, v) = (10v \cos u, 10v \sin u, 10 \cos u + v)$$

$$\partial_u \Phi = (-10 \sin u, 10 \cos u, 0), \partial_v \Phi = (0, 0, 1).$$

$$\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -10 \sin u & 10 \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (10 \cos u, 10 \sin u, 0). \quad (\text{A } \partial_u \Phi \times \partial_v \Phi \text{ sor-}$$

rend esetén mutat kifelé a normálvektor.)

$$\langle f(\Phi(u, v)), \partial_u \Phi \times \partial_v \Phi \rangle = 100v \cos^2 u + 100v \sin^2 u = 100v.$$

$$\int_{\Phi} f = \int_{\Omega} \langle f(\Phi(u, v)), \partial_u \Phi \times \partial_v \Phi \rangle du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^2 100v dv du = 400\pi.$$