

5. Gyakorló feladatsor

Lineáris leképezések mátrixa, speciális mátrixok

- Írjuk fel az x -tengelyre való tükrözés mátrixát, ha
 - $B_1 = B_2 = \{\underline{i}, \underline{j}\}$;
 - $B_1 = \{\underline{j}, -\underline{i}\}$, $B_2 = \{\underline{i}, \underline{j}\}$
 - $B_1 = B_2 = \{\underline{j}, -\underline{i}\}$
- Írjuk fel a ϕ szögű elforgatás mátrixát, ha
 - $B_1 = \{\underline{i}, \underline{j}\}$, $B_2 = \{\underline{i} + \underline{j}, 2\underline{j}\}$;
 - $B_1 = \{2\underline{i}, 2\underline{j}\}$, $B_2 = \{\underline{i} + \underline{j}, \underline{j}\}$!
- Mi lesz a 90° -os elforgatás mátrixa, ha $B_1 = \{\underline{i}, \underline{j}\}$, $B_2 = \{\underline{j}, -\underline{i}\}$?
- Mi a mátrixa az egymás utáni 60° -os elforgatásnak és y tengelyre való tükrözésnek, ha B_1 és B_2 is a descartesi bázis?
 - Mi a mátrix, ha fordított sorrendben végezzük el a tükrözést és a forgatást?
- Melyik jelző illik rá az

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixra az következők közül: ortogonális, szimmetrikus, normális, permutációs, nilpotens?

Megoldások:

- B_1 elemei: $\underline{i}$ és $\underline{j}$. Ezen két vektor képét (x -tengelyre vett tükörkép) kell meghatározni először: $\underline{i}$ képe $f(\underline{i}) = \underline{i}$, $\underline{j}$ képe pedig $f(\underline{j}) = -\underline{j}$. Az első vektor koordinátái B_2 -ben (ami most szintén a descartesi bázis) $(1, 0)$ ez a vektor kerül A első oszlopába, a másodiké pedig $(0, -1) \rightarrow A$ második oszlopa. Tehát a keresett mátrix:

$$A = A_{B_1, B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(Mire jó ez? Ennek segítségével kiszámítható tetszőleges síkvektor tükörképe mátrixszorzással. Pl. tekintsük a $2\underline{i} + 4\underline{j}$ vektort. Ez a B_1 -ben a $(2, 4)$ $\mathbb{R}^2$ -beli vektornak felel meg. Ha ezt megszorozzuk az előbbi mátrixszal, a $(2, -4)$ vektort kapjuk. Ez a B_2 -ben a $2\underline{i} - 4\underline{j}$ vektornak felel meg, és valóban ez a tükörkép.)

b.) Itt most a B_1 bázis más, elemei $\underline{j}$, $-\underline{i}$. Ezért most ezeknek kell megvizsgálni a tükörképét:

$f(\underline{j}) = -\underline{j}$ koordinátái B_2 -ben $(0, -1)$,

$f(-\underline{i}) = -\underline{i}$ koordinátái B_2 -ben $(-1, 0)$.

Így a mátrix most

$$A_{B_1, B_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(Ezzel is kiszámítható az előbbi vektor tükörképe, csak a mátrixszal való szorzás előtt nem a descartesi, hanem az új B_1 bázisbeli koordinátaival kell számolni, azaz a $(4, -2)$ vektort kell szorozni ezzel a mátrixszal).

c.) B_1 első eleme $\underline{j}$, képe $f(\underline{j}) = -\underline{j}$. Ezt kell felírni a B_2 -ben, ami most nem a descartesi bázis. Keressük ezért azon α_1, α_2 koordinátákat, amelyek mellett

$$-\underline{j} = \alpha_1 \underline{j} + \alpha_2 \cdot (-\underline{i})$$

Ebből $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 0$. $\rightarrow A$ első oszlopa: $(-1, 0)$

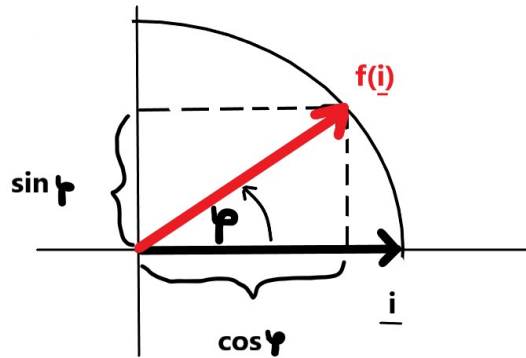
B_1 második eleme $-\underline{i}$, képe $f(-\underline{i}) = -\underline{i}$. Ezt is felírjuk a B_2 -ben: keressük azon β_1, β_2 koordinátákat, amelyek mellett

$$-\underline{i} = \beta_1 \underline{j} + \beta_2 \cdot (-\underline{i})$$

Ebből $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$. $\rightarrow A$ második oszlopa: $(0, 1)$. Így a mátrix:

$$A_{B_1, B_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Először elforgatjuk ϕ szöggel a B_1 elemeit, vagyis a descartesi egységvektorokat. Az $\underline{i}$ elforgatottjának descartesi koordinátái $\cos \phi, \sin \phi$.



De nekünk most a B_2 -beli koordináták kellene, tehát azon α_1, α_2 számok, amelyekre

$$\cos \phi \underline{i} + \sin \phi \underline{j} = \alpha_1(\underline{i} + \underline{j}) + \alpha_2 \cdot 2\underline{j}$$

Egyeztetve az $\underline{i}$ és $\underline{j}$ együtthatóját a két oldalon, a

$$\cos \phi = \alpha_1, \quad \sin \phi = \alpha_1 + 2\alpha_2$$

egyenletrendszerre jutunk. Az első megadja α_1 -et, a másodiktól pedig $\alpha_2 = \frac{\sin \phi - \cos \phi}{2}$ adódik. Innen már látszik a keresett mátrix első oszlopa.

A B_1 második eleme $\underline{j}$, elforgatottjának descartesi koordinátái $-\sin \phi, \cos \phi$. Most azon β_1, β_2 koordinátákat keressük, amelyek mellett

$$-\sin \phi \underline{i} + \cos \phi \underline{j} = \beta_1(\underline{i} + \underline{j}) + \beta_2 \cdot 2\underline{j}$$

Egyeztetve az $\underline{i}$ és $\underline{j}$ együtthatóját a két oldalon, a

$$-\sin \phi = \beta_1, \quad \cos \phi = \beta_1 + 2\beta_2.$$

A második egyenletből $\beta_2 = \frac{\cos \phi + \sin \phi}{2}$. Így kapjuk a megoldásban megadott mátrix második oszlopát. Tehát

$$A = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \frac{\sin \phi - \cos \phi}{2} & \frac{\cos \phi + \sin \phi}{2} \end{bmatrix}$$

b.)

$$\begin{bmatrix} 2 \cos \phi & -2 \sin \phi \\ 2(\sin \phi - \cos \phi) & 2(\cos \phi + \sin \phi) \end{bmatrix}$$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(Nem meglepő, hogy a helybenhagyás mátrixát kaptuk, hiszen a vektorokkal együtt a koordináta-rendszert (báziselemeket) is 90° -kal elforgattuk. Így a vektoroknak nem változnak meg a koordinátáik.)

4. a.)

$$A_t \cdot A_{60^\circ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b.)

$$A_{60^\circ} \cdot A_t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A két különböző sorrendben elvégzett mátrixszorzás eltérő eredményt ad, azaz nem mindegy, hogy milyen sorrendben végezzük el a tükrözést és a 60° -os forgatást.

5. Ortogonális, szimmetrikus, normális. Mivel minden páros hatványa az identitásmátrix, és minden páratlan hatványa önmaga, így nem nilpotens.