

6. Gyakorló feladatsor

Sajátértékek, sajátvektorok. Mátrixfüggvények, koordináta-transzformációk, vektornorma, mátrixnormák

1. Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit is sajátvektorait!

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -10 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit!

$$B = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Létezik-e spektrálfelbontása az 1. feladatbeli mátrixnak? Ha igen, adjuk meg egy ilyen felbontását!
4. Ismeretes, hogy a szinusz és koszinuszfüggvény a következő hatványsorok összegfüggvénye:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots;$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Írjuk fel az alábbi mátrixok szinuszt és koszinuszt!

$$\text{a.) } A = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \quad \text{b.) } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{c.) } C = \begin{bmatrix} \frac{3\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \\ \pi & 0 \end{bmatrix}$$

5. a.) Írjuk fel a koordináta-transzformáció mátrixát, ha a $B_1 = \{2\underline{i}, -\underline{j}\}$ bázisról a $B_2 = \{\underline{i} - \underline{j}, \underline{i} + \underline{j}\}$ bázisra szeretnénk áttérni. Hossztartó-e a transzformáció?
- b.) Mik a $2\underline{i} + 3\underline{j}$ vektor koordinátái a B_1 és a B_2 bázisban? Az utóbbihoz használjuk fel az a.) részben kiszámított mátrixot.
6. Adjuk meg az $x = (1, -2, 5, 0) \in \mathbb{R}^4$ vektor mindhárom tanult vektornormáját!
7. Norma-e az $\mathbb{R}^2$ vektortéren az

$$(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{2}|x_1| + |x_2|$$

függvény?

8. Normát definiál-e $\mathbb{R}^3$ -on a következő függvény?

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto |x_1|$$

9. Számítsuk ki az 1. feladatban szereplő A és B mátrix mindhárom tanult vektornormához tartozó indukált mátrixnormáját!

Megoldások:

1. A sajátértékek meghatározásához megoldjuk a $\det(A - \lambda I) = 0$ egyenletet: $(-7 - \lambda)(8 - \lambda) + 50 = 0$. Egyszerűbb alakra hozva: $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$. Megoldásai: $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = -2$.

Sajátvektorok meghatározása a $\lambda_1 = 3$ sajátértékhez: megkeressük az $Au = 3u$ (azaz $(A - 3I)u = 0$) egyenletrendszer nemtriviális $u = (u_1, u_2)$ megoldásait. A rendszer első egyenlete $-10u_1 - 10u_2 = 0$ (a második ezzel összefügg lineárisan), így az összes megoldás mindazon (u_1, u_2) számpárok összessége, amelyekre $u_1 = -u_2$. Tehát a sajátvektorok az $u = (p, -p)$, $p \neq 0$ alakú vektorok.

Sajátvektorok meghatározása a $\lambda_2 = -2$ sajátértékhez: megkeressük az $Au = -2u$ (azaz $(A + 2I)u = 0$) egyenletrendszer nemtriviális $u = (u_1, u_2)$ megoldásait. A rendszer első egyenlete $-5u_1 - 10u_2 = 0$ (a második ezzel összefügg lineárisan), így az összes megoldás mindazon (u_1, u_2) számpárok összessége, amelyekre $u_1 = -2u_2$. Tehát a sajátvektorok az $u = (-2q, q)$, $q \neq 0$ alakú vektorok.

2. B és C háromszög- vagy diagonálmátrix, így a sajátértékek a főátlóban lévő számok. Tehát B sajátértékei: $-7, 3, 6$, és C sajátértékei: $-1, 3, 0$.
3. Mivel a 2×2 -es A mátrixnak van két különböző sajátértéke, így létezik spektrálfelbontása. A középső diagonális mátrix főátlójában ezen sajátértékek vannak, tehát 3 és -2 . Láttuk hogy egy-egy sajátvektor ezekhez pl. az $(1, -1)$ ill. a $(-2, 1)$. Így a spektrálfelbontásban szereplő S mátrix legyen

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

amelynek inverze

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ezzel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. a.) Az A mátrix diagonálmátrix, ezért a diagonálisban lévő számokat kell csak behelyettesíteni a szinuszfüggvénybe:

$$\sin A = \begin{bmatrix} \sin \pi & 0 \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- b.) A B mátrix nilpotens, a harmadik hatványa már a nullmátrix, ezért

$$\sin B = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

és

$$\cos B = I - \frac{B^2}{2!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- c.) A C mátrix diagonalizálható, ugyanis létezik spektrálfelbontása. Sajátértékei: $\pi, \pi/2$, és egy-egy sajátvektora $(1, 1)$, $(1, 2)$, amiből (a tavaly tanult módon)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A mátrix szinuszának és koszinuszának kiszámításához a spektrálfelbontásban közösen álló diagonálmátrixnak vesszük a szinuszát és koszinuszát, és elvégezzük a mátrixszorzásokat:

$$\sin C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \pi & 0 \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\cos C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \pi & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

5. a.) A keresett mátrix 1. oszlopába írjuk a B_1 első elemének, azaz $2\hat{i}$ -nek a B_2 bázisbeli koordinátáit: $(1, 1)$. A 2. oszlopba írjuk a B_1 második elemének, azaz $-\hat{j}$ -nek a B_2 bázisbeli koordinátáit: $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Így a koordináta-transzformáció mátrixa:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ez a mátrix nem ortogonális, így a transzformáció nem hossztartó.

b.) A $2\underline{i} + 3\underline{j}$ vektor $1 \cdot 2\underline{i} + (-3)(-\underline{j})$ alakban írható fel, így a B_1 -beli koordinátavektora $(1, -3)$. Szorozzuk meg az $(1, -3)$ vektort a K mátrixszal, így kapjuk a B_2 -beli koordinátavektort: $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$.

$$6. \|x\|_1 = |1| + |-2| + |5| + |0| = 8, \|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{30}, \|x\|_\infty = \max\{|1|, |-2|, |5|, |0|\} = 5.$$

7. 1. tul.: $\frac{1}{2}|x_1| + |x_2| \geq 0$ mindig az abszolút érték miatt. Továbbá $x_1 = 0, x_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}|x_1| + |x_2| = 0$ és $\frac{1}{2}|x_1| + |x_2| = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ és $x_2 = 0$ (Két nemnegatív szám összege csak akkor lesz 0, ha mindkét tag 0). ✓

2. tul.: Mivel $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$, így

$$\lambda \cdot (x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{2}|\lambda x_1| + |\lambda x_2| = \frac{1}{2}|\lambda| \cdot |x_1| + |\lambda| \cdot |x_2| = |\lambda| \left(\frac{1}{2}|x_1| + |x_2| \right) \checkmark$$

3. tul.:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) \mapsto ?$$

Mivel $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, így

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &\mapsto \frac{1}{2}|x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \leq \frac{1}{2}|x_1| + \frac{1}{2}|y_1| + |x_2| + |y_2| \\ &= \frac{1}{2}|x_1| + |x_2| + \frac{1}{2}|y_1| + |y_2| \checkmark \end{aligned}$$

Tehát norma.

8. Nem, ugyanis nem csak a $(0, 0, 0)$ vektorhoz rendel hozzá nullát, hanem pl. a $(0, 1, 1)$ vektorhoz is, így sérül az első normatulajdonság.

9. a.) $\|A\|_1 = \|A\|_{\max} = \pi, \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sqrt{\pi^2} = \pi$. (Az $A^T A$ mátrix diagonálmátrix, így sajátértékeit leolvashatjuk a főátlóból.)

b.) $\|B\|_1 = \|B\|_{\max} = 2, \|B\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(B^T B)} = \sqrt{(3 + \sqrt{5})/2} = 1,618$. (Az utóbbi szám a $\det(B^T B - \lambda I) = \lambda(-\lambda^2 + 3\lambda - 1) = 0$ egyenlet megoldásául kapott sajátértékekből (3 db) kapható meg, a legnagyobb sajátértékből gyököt vonva.)