Lineáris leképezések

I. $f:\Re \Rightarrow \Re$

$f: x \to y \qquad y = f(x)$

Tekintsük az $f(x) = ax \quad \Re \Rightarrow \Re$ függvényt, $a \in \Re$ tetszőleges.

Tulajdonságok:

1. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in \Re$

2. $f(\alpha x) = \alpha f(x) \qquad \forall x \in \Re, \quad \forall \alpha \in \Re$

Azon függvényekre, amelyekre fennáll (1.) és (2.) lineáris függvényeknek (leképezés) nevezzük.

Megmutatható, hogy az $\Re \Rightarrow \Re$ leképezések között csak az $f(x) = ax$ alakúak lineárisak.

II. $f:\Re^2 \Rightarrow \Re$

$f:(x_1,x_2)\rightarrow y \quad f(\underline{x})=y$

1. $f(\underline{x}+\underline{x}')=f(\underline{x})+f(\underline{x}') \qquad \forall \underline{x},\underline{x}' \in \Re^2$

2. $f(\alpha\underline{x})=\alpha f(\underline{x}) \qquad \forall \underline{x}\in \Re^2, \quad \forall \alpha \in \Re$

Megmutatható, hogy az $\Re^2 \Rightarrow \Re$ lineáris leképezések $f(x_1,x_2)=a_1x_1+a_2x_2$ alakúak, ahol $\forall a_1,a_2 \in \Re$.

vagy

$$y=f(\underline{x})=f(x_1,x_2)=(a_1,a_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

vektor szorzása egy 1×2 mátrixszal

III. $f:\Re^2 \Rightarrow \Re^2$

$f:(x_1,x_2)\rightarrow(y_1,y_2) \quad f(\underline{x})=\underline{y}$

1. $f(\underline{x}+\underline{x}')=f(\underline{x})+f(\underline{x}') \qquad \forall \underline{x},\underline{x}' \in \Re^2$

2. $f(\alpha\underline{x})=\alpha f(\underline{x}) \qquad \forall \underline{x}\in\Re^2, \quad \forall\alpha\in\Re$

y_1 és y_2 is x_1 és x_2 függvénye $\rightarrow$ $\begin{matrix} y_1=f_1(x_1,x_2) & f_1,f_2:\Re^2\Rightarrow\Re \\ y_2=f_2(x_1,x_2) & f \text{ koordináta}-\text{függvényei} \end{matrix}$

f lineáris leképezés $\Leftrightarrow$ ha f_1 és f_2 lineáris azaz

$$\begin{aligned} y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{aligned} \qquad a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}\in\Re$$

$\Re^2\Rightarrow\Re^2$ lineáris leképezések 4 számmal adhatók meg.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\underline{\underline{A}} \text{ akkor}$$

$$\begin{array}{rc} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \end{array}$$ vagy $\underline{y}=f(x_1,x_2)=\underline{\underline{A}}\,\underline{x}$

$$\begin{array}{rcl} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \\ \underline{y}=f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ \leftarrow a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{matrix} \end{array}$$

Adott bázisban minden lineáris transzformációnak megfelel egy és csak egy

$$\underline{y}=f(\underline{x})=x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$ *(transzformáció egyenlete)*

alakú összefüggés, amelyben az $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \end{pmatrix}$ *vektorok a bázisvektorok képelemei, az* x_i *számok pedig az* $\underline{x}$ *vektornak az adott bázisra vonatkozó koordinátái.*

Egy $\Re^2 \Rightarrow \Re^2$ lineáris leképezés nem más, mint egy 2×2-es mátrixszal való ***szorzás***. Azaz az $\Re^2 \Rightarrow \Re^2$ lineáris leképezések *reprezentálható* egy 2×2-es mátrixszal.

Általánosan $f:\Re^n \Rightarrow \Re^m$ lineáris leképezés $\longrightarrow$ $\underline{\underline{A}} \in M_{m,n}$